

---

# *La Matematica nella Società e nella Cultura*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

ANDREA RAICONI

## **Progettazione ed implementazione di algoritmi risolutivi efficienti per problemi combinatoriali su reti di telecomunicazione**

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 3 (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 67–70.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI\\_2010\\_1\\_3\\_1\\_67\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_67_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

## **Progettazione ed implementazione di algoritmi risolutivi efficienti per problemi combinatoriali su reti di telecomunicazione**

ANDREA RAICONI

Il lavoro svolto si pone come obiettivo quello di presentare algoritmi risolutivi (sia esatti che euristici) e modelli matematici per differenti problemi di ottimizzazione combinatoria con applicazioni pratiche nell'ambito delle reti di telecomunicazione. In particolare, sono stati proposti per la prima volta ed analizzati tre problemi definiti su grafi colorati sugli archi. È stato inoltre studiato un problema definito su grafi pesati, il Push-Tree Problem, per il quale esistevano sinora in letteratura soltanto risultati teorici di approssimazione. Tutti i problemi analizzati hanno tra le possibili applicazioni il multicast di informazioni su reti di telecomunicazioni.

Come detto, gran parte del lavoro di tesi è stato svolto nel contesto dei problemi definiti su grafi colorati sugli archi. Per capire il contesto applicativo preso in esame, si consideri ad esempio una rete di comunicazione composta da connessioni appartenenti a diverse compagnie. Questa tipologia di problemi può essere rappresentata attraverso un grafo  $G = (V, E, L)$  dove  $V$  è l'insieme dei nodi,  $E$  quello degli archi e ad ognuno degli archi è associata una etichetta (o colore), rappresentante la compagnia a cui appartiene la connessione; l'insieme  $L$  sarà composto da tutte le etichette differenti che appaiono nel grafo. Supponendo ora che lo scopo sia quello di assicurare il servizio ad ogni terminale ottimizzando i costi totali di gestione, la soluzione ottima può essere ricondotta ad un albero ricoprente che utilizzi il numero minimo di colori (Minimum Labeling Spanning Tree Problem, o MLST).

MLST fu inizialmente proposto da Broersma e Li [1], che dimostrarono la sua NP-Completezza mediante riduzione dal Minimum Dominating Set Problem, e contemporaneamente mostrarono che il problema opposto di individuare lo Spanning Tree con il massimo numero di colori è risolvibile in tempo polinomiale. Indipendentemente, Chang e Leu [2] fornirono una diversa dimostrazione di NP-Completezza mediante riduzione dal Set Covering Problem ed inoltre svilupparono due euristiche greedy ed un approccio esatto. La successiva bibliografia sul problema ha prodotto principalmente algoritmi di approssimazione e diversi approcci di tipo metaeuristico.

Uno dei problemi di ricerca presi in esame durante il lavoro di tesi di dottorato è stato il Minimum Labelled Hamiltonian Cycle Problem: dato un grafo  $G = (V, E, L)$  non orientato e colorato sugli archi, si intende individuare un ciclo hamiltoniano di  $G$  contenente il minimo numero di colori. Il problema del ciclo hamiltoniano, come noto,

è NP-Completo e connesso a molti altri importanti problemi combinatoriali (Traveling Salesman Problem, Vehicle Routing Problem). Si è voluto introdurre questo problema pensando principalmente ad applicazioni pratiche nel campo delle reti ottiche. In tali reti, la comunicazione di tipo multicast avviene definendo un albero della rete denominato *light-tree* che copre tutti i vertici interessati. In questo albero, i nodi di grado superiore a due (definiti nodi *branch*) per poter propagare il segnale ottico hanno bisogno di dividerlo, e a tale scopo in questi nodi è necessario predisporre delle apparecchiature denominate *switch*. Dal momento che ogni *switch* presenta un costo ed abbassa la qualità del segnale, individuare un path hamiltoniano del grafo (o un ciclo se si è interessati al multicast a partire da un nodo qualsiasi) rappresenta un importante obiettivo. Ponendosi nuovamente nel contesto in cui le connessioni appartengono a differenti compagnie, la soluzione con il minor numero di colori rappresenta una ulteriore riduzione dei costi.

Il lavoro svolto sul problema consiste in una dimostrazione di NP-Completezza, per riduzione dal problema del ciclo hamiltoniano, nella progettazione e implementazione di differenti approcci risolutivi sia di tipo euristico che esatto e nella formulazione di vari modelli di programmazione lineare intera.

È stata innanzitutto sviluppata una euristica costruttiva basata sulla progressiva estensione di un path del grafo, che in ogni fase dell'algoritmo tenta di utilizzare colori già introdotti nella soluzione parziale o in grado di coprire il maggior numero possibile di vertici non ancora inclusi nella soluzione.

È stato poi deciso di estendere le soluzioni ottenute da tale algoritmo utilizzando come sottoprocedura di una metaeuristica di tipo Tabu Search. L'algoritmo Tabu Search parte da una soluzione ottenuta con una prima esecuzione dell'euristica costruttiva e ad ogni iterazione produce un vicinato di nuove soluzioni. Successivamente l'algoritmo seleziona dal vicinato la soluzione migliore tale che la mossa dalla soluzione corrente ad essa non sia nella *tabu list* e la utilizza per l'iterazione successiva.

Una differente classe di euristiche per lo stesso problema si basa invece su delle tecniche chiamate *deconstruction and repair*. Dato un ciclo Hamiltoniano del grafo, la fase di *deconstruction* consiste nella scomposizione della soluzione in segmenti disgiunti mediante l'eliminazione degli archi di un dato colore. La fase di *repair* ha invece lo scopo di ricostruire una soluzione ammissibile senza utilizzare colori che non siano già presenti nei segmenti. Sulla base di tali tecniche sono stati progettati una euristica iterativa (*Iterative Deconstruction and Repair*) ed un algoritmo metaeuristico di tipo genetico.

È stato inoltre sviluppato un algoritmo esatto di tipo  $A^*$ , che utilizza criteri di sottostima per l'individuazione di nuovi colori da inserire ed una procedura esaustiva per la verifica dell'ammissibilità delle soluzioni.

Per quanto riguarda le formulazioni matematiche, ci si è concentrati sulla individuazione di modelli con un numero polinomiale di vincoli, e nello specifico sono state prese in considerazione tre formulazioni di flusso, una formulazione basata su vincoli di eliminazione dei cicli di tipo Miller-Tucker-Zemlin e tre formulazioni in cui la visita dei nodi viene divisa in intervalli temporali, modellati da opportune variabili.

Un altro problema che è stato definito e preso in esame è quello del Longest Simple Path with Bounded Labels o LPBL: dato un grafo  $G = (V, E, L)$  non direzionato e colorato sugli archi ed un parametro  $k$ , si intende individuare il path semplice più lungo possibile che utilizzi al più  $k$  colori distinti. LPBL trova contesti applicativi negli stessi scenari discussi in merito ad MLHC, nel caso in cui si abbiano vincoli di budget non violabili sul numero differente di connessioni diverse utilizzabili. Per questo problema sono state applicate varianti di alcuni degli approcci discussi in precedenza (euristica costruttiva, Tabu Search e modello di tipo Miller-Tucker-Zemlin).

Un terzo problema combinatorio definito e preso in esame in questo ambito di ricerca, che prende nuovamente in considerazione il caso di limitazioni di budget, è una variante di MLST denominata  $k$ -Labelled Spanning Forest Problem o KLSF: dato un grafo  $G = (V, E, L)$  ed un parametro  $k$ , si intende individuare la foresta ricoprente costituita dal minimo numero possibile di componenti che utilizzi al più  $k$  colori. Per quanto riguarda i possibili scenari applicativi, supponiamo che esistano delle informazioni che devono essere trasmesse in multicast a tutti i nodi di una rete, e che si debbano individuare dei nodi da utilizzare come sorgenti per tale informazione. Se il vincolo di budget sul numero di connessioni differenti non permette di individuare un unico albero di multicast, sarà necessario predisporre almeno un nodo sorgente per ogni componente connessa che si riesce ad individuare. Dal momento che il mantenimento e la sincronizzazione delle sorgenti presenta dei costi, diventa di interesse l'individuazione della foresta ricoprente con il minor numero di componenti.

È stato dimostrato che il problema è NP-Completo nel caso generale ma diventa polinomiale nel caso in cui  $k$  sia un parametro fisso. È stata poi implementata una prima euristica di base basata sull'algoritmo MVCA inizialmente presentato da Chang e Leu [2] per MLST. Tale euristica è stata poi inserita all'interno di approcci metaeuristici di tipo Pilot, Reactive Tabu Search, Simulated Annealing e genetico.

Successivamente ci si è concentrati sull'individuazione di soluzioni esatte mediante la messa a punto di un algoritmo di tipo Branch and Bound, che fa utilizzo di un albero binario di ricerca, dove ogni livello rappresenta la decisione circa l'inclusione o meno di un determinato colore, e di varie tecniche di pruning. Sono stati infine formulati due modelli di programmazione lineare rispettivamente di tipo Single Commodity Flow e Miller-Tucker-Zemlin.

È stato infine oggetto di studio un problema definito su grafi pesati, il Push-Tree Problem. Si consideri il caso di un grafo  $G = (V, E)$  pesato sugli archi, rappresentante una rete di telecomunicazioni in cui in cui i pesi rappresentano dei costi di connessione. Su tale grafo un nodo sorgente produce con una data frequenza nuove informazioni destinate ad un sottoinsieme di altri nodi (nodi richiesta).

A seconda della frequenza con cui i nodi richiesta hanno bisogno degli aggiornamenti, potrebbe essere più conveniente instradarli appena disponibili lungo un albero di Steiner o soddisfare singole richieste attraverso un albero dei cammini minimi. Il Push-Tree Problem si pone come generalizzazione di queste due situazioni; un push-tree è un albero di broadcast che non contiene necessariamente tutti i

nodi richiesta. Ogni nodo richiesta non incluso potrà eseguire una richiesta di informazioni al nodo del Push-Tree a lui più vicino, dal momento che essi sono tenuti aggiornati dalla sorgente. L'obiettivo è minimizzare il costo totale degli aggiornamenti, sulla base della configurazione di frequenze di aggiornamento e di richiesta dei vari nodi.

Havet e Wennink [3] hanno dimostrato la NP-Completezza del problema. Hanno inoltre presentato un algoritmo esatto di complessità polinomiale per la risoluzione del problema quando il grafo di input è un albero ed un algoritmo di approssimazione per il caso generale.

Il lavoro svolto nell'ambito di questo problema è consistito nello sviluppo di due approcci di tipo metaeuristico (Simulated Annealing e Reactive Tabu Search) in grado di migliorare significativamente i risultati dell'algoritmo approssimato precedentemente noto e di due modelli di programmazione lineare, rispettivamente di tipo Single Commodity e Miller-Tucker-Zemlin.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] BROERSMA H. e LI X., *Spanning trees with many or few colors in edge-colored graphs*, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **17** (1997), 259-269.
- [2] CHANG R. S. e LEU S. J., *The minimum labeling spanning trees*, *Information Processing Letters*, **63** (1997), 277-282.
- [3] F. HAVET e M. WENNINK, *The push tree problem*, *Networks*, **44** (2004), 281-291.

Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università degli Studi di Salerno  
e-mail: [araiconi@unisa.it](mailto:araiconi@unisa.it)  
Dottorato in Ricerca Operativa  
con sede presso l'Università di Roma "La Sapienza" – Ciclo XXI  
Direttore di Ricerca: Prof. Raffaele Cerulli, Università degli Studi di Salerno