La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Elena Polastri

Immersioni birazionalmente equivalenti

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 63–66.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_63_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Aprile 2010, 63-66

Immersioni birazionalmente equivalenti

ELENA POLASTRI

1. – Introduzione storica e presentazione del problema

Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva razionale di dimensione r, allora esiste una mappa birazionale $\phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^r$. Il più semplice embedding di $\mathbb{P}^r$, come varietà proiettiva, è quello lineare. È naturale chiedersi se la mappa ϕ può essere estesa ad una mappa birazionale $\Phi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ tale che $\Phi(X)$ è uno spazio lineare, in tal caso diremo che la varietà X è *Cremona equivalente* ad uno spazio lineare.

Il problema di estendere una mappa birazionale ricorda la *proprietà di Abhyankar-Moh* (AMP) [1], la quale riguarda l'estensione degli embeddings polinomiali in $\mathbb{C}^n$ ad automorfismi di $\mathbb{C}^n$. L'AMP è stata dettagliatamente trattata per le varietà lisce di codimensione alta. Ad esempio, Jelonek studiò il caso delle varietà sul campo complesso e, in [2], dimostra che le varietà affini $A \subset \mathbb{C}^n$ di dimensione r hanno l'AMP se $r \ll n$. Quindi, nel caso di varietà affini sul campo complesso, viene data una risposta positiva al problema quando la codimensione di tali varietà è maggiore della dimensione. Inoltre l'AMP può essere estesa a varietà affini su un campo infinito qualsiasi k, allora ci si può chiedere se due diversi embeddings di una stessa varietà affine sono equivalenti a meno di automorfismi di k^n. In questo contesto, è data una risposta positiva da Srinivas, in [4], per varietà con singolarità isolate aventi dimensione locale uguale a metà della dimensione dell'embedding.

Il nostro scopo è stato quello di risolvere un problema simile nel contesto della geometria birazionale delle varietà proiettive, più precisamente abbiamo cercato di capire quando due embeddings birazionali della stessa varietà sono equivalenti a meno di una trasformazione di Cremona, in tal caso essi verranno detti *Cremona equivalenti*. La natura birazionale del problema ci ha suggerito che i tipi di singolarità della varietà non hanno importanza, infatti abbiamo trattato arbitrarie varietà proiettive irriducibili. L'importanza del risultato deriva dal range in cui il problema è risolvibile: poiché non è difficile fornire esempi di ipersuperfici razionali che non sono Cremona equivalenti ad un iperpiano, in generale, avremo che divisori birazionalmente equivalenti non sono Cremona equivalenti, ma questo è sorprendentemente l'unico caso. Infatti, abbiamo dimostrato che due embeddings birazionali in $\mathbb{P}^n$ della stessa varietà proiettiva X di dimensione r, su un campo algebricamente chiuso, sono *Cremona equivalenti* se $n \geq r+2$.

2. – Varietà proiettive di codimensione almeno 2

Come primo passo per la comprensione del nostro problema, abbiamo considerato varietà proiettive $X \subset \mathbb{P}^n$ di dimensione $r \leq n - 2$.

Innanzitutto, abbiamo considerato il caso di una curva razionale, irriducibile e ridotta $C \subset \mathbb{P}^n$, per $n \geq 3$ e abbiamo cercato di capire se esiste una mappa birazionale $\Phi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, $n \geq 3$, tale che $\Phi(C)$ sia una retta. Abbiamo già visto che questa proprietà di estensione ricorda la *proprietà di Abhyankar-Moh* (AMP). Il primo esempio significativo risolto positivamente fu quello della retta in $\mathbb{C}^2$, [1], questo, tradotto nel dizionario della geometria proiettiva, ci dice che una curva razionale piana con un'unica singolarità è *Cremona equivalente* ad una retta. D'altra parte, abbiamo osservato che un'arbitraria curva razionale in $\mathbb{P}^2$ non è Cremona equivalente ad una retta, l'esempio più semplice è quello della generica proiezione di $\Gamma \sim (1, a) \subset \mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{P}^3$, per $a \geq 5$, ma abbiamo dimostrato che questa è l'unica risposta negativa al nostro problema.

TEOREMA 1. – *Sia $C \subset \mathbb{P}^n$, per $n \geq 3$, una curva razionale, irriducibile e ridotta. Allora C è Cremona equivalente ad una retta.*

Abbiamo dimostrato tale risultato costruendo una serie di mappe birazionali che trasformano C passo dopo passo in una retta. Per prima cosa, abbiamo costruito una mappa birazionale $\Omega : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ che risolve le singolarità di C, considerando mappe birazionali sufficientemente generiche, aventi come fibre delle curve, in modo da controllare le immagini di esse. Con le stesse mappe birazionali usate per la risoluzione, abbiamo ottenuto curve lisce *Cremona equivalenti* ad una retta di grado qualsiasi. Infine abbiamo prodotto una mappa birazionale $\Theta : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ tra due curve razionali lisce dello stesso grado. È stato fondamentale riconoscere una curva razionale di grado d come un sottosistema lineare di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$, così la mappa richiesta può essere interpretata come un modo per passare da un sottosistema ad un altro in un numero finito di passi.

Successivamente, abbiamo studiato le immersioni birazionalmente equivalenti di una varietà fissata. Sia X una varietà proiettiva irriducibile e ridotta e sia $\mathcal{L}$ un sistema lineare su X. Diciamo che $\mathcal{L}$ è un embedding birazionale (in $\mathbb{P}^n$) se $\varphi_{\mathcal{L}} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ è birazionale sull'immagine. Se $\mathcal{L}$ e $\mathcal{G}$ sono due embeddings birazionali in $\mathbb{P}^n$ della stessa varietà X, diciamo che $\mathcal{L}$ è *Cremona equivalente* a $\mathcal{G}$ se esiste una mappa birazionale $\Phi : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ tale che $\varphi_{\mathcal{L}} = \Phi \circ \varphi_{\mathcal{G}'}$. Abbiamo dimostrato il seguente:

TEOREMA 2. – *Sia X una varietà proiettiva irriducibile e ridotta di dimensione r su un campo algebricamente chiuso k. Allora due embeddings birazionali in $\mathbb{P}^n$ sono Cremona equivalenti se $n \geq r + 2$.*

Per dimostrare il teorema abbiamo applicato la stessa strategia usata per le curve, ossia abbiamo costruito una catena di trasformazioni di Cremona che modificano l'uno nell'altro i sistemi lineari che danno i due diversi embeddings. Questo è stato fatto considerando i due embeddings birazionali come due diverse proiezioni di un embedding comune.

3. – Divisori birazionalmente equivalenti

Consideriamo una varietà proiettiva irriducibile e ridotta X di dimensione $r \leq 2$ su un campo algebricamente chiuso k, con $\mathrm{char}(k) = 0$. Abbiamo visto che, in generale, due divisori birazionalmente equivalenti non sono *Cremona equivalenti*. Infatti, abbiamo dimostrato il seguente:

TEOREMA 3. – *Sia X una varietà proiettiva irriducibile e ridotta con* $\dim X \leq 2$. *Allora esistono infiniti embeddings di X in $\mathbb{P}^{\dim X+1}$ che non sono Cremona equivalenti.*

Innanzitutto, abbiamo considerato una coppia logaritmica $(\mathbb{P}^2, a\,C)$, dove C è una curva piana irriducibile e ridotta di genere arbitrario. In particolare, abbiamo applicato ad essa delle trasformazioni birazionali per ottenere un'altra coppia $(S, a\,\widetilde{C})$, la quale è un modello di $(\mathbb{P}^2, a\,C)$ con singolarità canoniche, avente il divisore log canonico $K_S + a\widetilde{C}$ nef e dimensione di Kodaira $\overline{\kappa}(S, a\widetilde{C}) \leq 1$. In questo modo, abbiamo ottenuto una classificazione di tali coppie in termini di equivalenza birazionale tra $(\mathbb{P}^2, a\,C)$ e $(S, a\,\widetilde{C})$. Ricordiamo che una simile classificazione, anche se in altra forma, è stata ottenuta anche da Iitaka. Abbiamo dimostrato il seguente:

TEOREMA 4. – *La curva $C \subset \mathbb{P}^2$ irriducibile e ridotta è birazionale ad una delle seguenti:*

- *ad una retta;*
- *ad una curva $\widetilde{C}$, tale che la coppia logaritmica $\left(\mathbb{P}^2, \frac{3}{d}\,\widetilde{C}\right)$ è un modello con singolarità canoniche, avente il divisore log canonico $K_{\mathbb{P}^2} + \frac{3}{d}\,\widetilde{C} \sim \mathcal{O}$ nef e $\overline{\kappa}\left(\mathbb{P}^2, \frac{3}{d}\widetilde{C}\right) = 0$;*
- *ad una curva $\widetilde{C} \subset \mathbb{F}_a$, con $\widetilde{C} \sim a\,C_0 + \beta f$, tale che la log coppia $\left(\mathbb{F}_a, \frac{2}{a}\,\widetilde{C}\right)$ è un modello con singolarità canoniche e con singolarità terminali in un intorno della curva eccezionale $C_0 \subset \mathbb{F}_a$, avente il divisore log canonico $K_{\mathbb{F}_a} + \frac{2}{a}\,\widetilde{C}$ nef e $\overline{\kappa}\left(\mathbb{F}_a, \frac{2}{a}\,\widetilde{C}\right) \leq 1$.*

In seguito, abbiamo utilizzato i risultati di Dicks riguardanti la teoria dei modelli &–minimali, per capire se una curva razionale, irriducibile e ridotta $C \subset \mathbb{P}^2$ è *Cremona equivalente* ad una retta. Abbiamo ottenuto una nuova dimostrazione di un risultato precedentemente provato da Kumar–Murthy in [3].

PROPOSIZIONE 1. – *Sia* $v : S \to \mathbb{P}^2$ *una risoluzione minimale delle singolarità della curva razionale* C *e sia* $C_S = v_*^{-1}(C)$ *la trasformata stretta di* C *rispetto a tale risoluzione. Se* $C_S^2 \geq -3$*, allora* C *è* Cremona equivalente ad una retta.

Il viceversa di tale proposizione non vale: infatti, esistono curve razionali C aventi C_S^2 arbitrariamente negativa, ma che sono Cremona equivalenti ad una retta.

Inoltre, abbiamo ottenuto alcuni risultati sulle curve razionali, irriducibili e ridotte $C \subset \mathbb{P}^2$, considerando il tipo e il numero di punti singolari o il modello &–minimale. Siano $m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq \ldots \geq m_k$ le molteplicità dei punti singolari della curva C, abbiamo ottenuto i seguenti risultati particolari:

- ogni curva razionale, irriducibile e ridotta $C \subset \mathbb{P}^2$ di grado $d \leq 5$ oppure di grado $d \geq 6$ avente $m_1 \geq d - 3$, è *Cremona equivalente ad una retta.*
- Se C è una curva razionale di grado $d \geq 6$ tale che $m_i \leq \dfrac{d}{3}$, per $i = 1, \ldots, k$, oppure $m_1 + m_2 + m_3 \leq d$, allora C non è Cremona equivalente ad una retta.
- Sia C una curva razionale di grado $d \geq 6$ tale che la coppia $\left(\mathbb{P}^2, \dfrac{3}{d}C\right)$ ha singolarità canoniche ordinarie. Sia $v : S \to \mathbb{P}^2$ una risoluzione minimale delle singolarità di C e sia $C_S = v_*^{-1}(C)$ la trasformata stretta di C. Allora, la coppia (S, C_S) è &–minimale ed è l'unico modello &–minimale di $(\mathbb{P}^2, C)$.

Infine, abbiamo considerato le superfici razionali, irriducibili e ridotte $S \subset \mathbb{P}^3$ di grado basso e abbiamo cercato di capire se esiste una mappa birazionale $\Psi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ tale che $\Psi(S)$ sia un piano. Abbiamo dimostrato che ogni superficie cubica razionale, irriducibile e ridotta è *Cremona equivalente* ad un piano.

BIBLIOGRAFIA

[1] ABHYANKAR S. S. e MOH T. T., *Embeddings of the line in the plane*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, **276** (1975), 148-166.

[2] JELONEK Z., *The extension of regular and rational embeddings*, Mathematische Annalen, **277** (1987), 113-120.

[3] KUMAR N. M. e MURTHY M. P., *Curves with negative self intersection on rational surfaces*, Journal of Mathematics of Kyoto University, **22**, no. 4 (1983), 767-777.

[4] SRINIVAS V., *On the embedding dimension of an affine variety*, Mathematische Annalen, **289** (1991), 125-132.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Ferrara
e-mail: plslne@unife.it
Dottorato in Matematica ed Informatica - curriculum Matematica
con sede presso l'Università degli Studi di Ferrara – Ciclo XXI
Direttore di ricerca: Prof.ssa Luisa Zanghirati