La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Francesca Marcellini

Leggi di conservazione nella dinamica dei gas e nei flussi di traffico

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 47–50.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_47_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Aprile 2010, 47-50

Leggi di conservazione nella dinamica dei gas e nei flussi di traffico

FRANCESCA MARCELLINI

In questa tesi di dottorato sono trattate leggi di conservazione, equazioni alle derivate parziali del primo ordine di tipo iperbolico, loro teoria e loro applicazioni. In particolare, si considerano sistemi di leggi di conservazione applicati all'ambito della dinamica dei gas e dei flussi di traffico stradale, con tecniche ispirate ad [1], sviluppate ed adattate ai vari problemi presi in considerazione.

Il primo risultato è contenuto in [2], ed è rivolto alla descrizione analitica di un fluido che scorre in un tubo con sezione $a = a(x)$ che varia con continuità. Un classico modello è descritto dal *p-system*, un sistema 2×2 di leggi di conservazione, dato da

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x q = -\dfrac{q}{a}\,\partial_x a \\[2ex] \partial_t q + \partial_x\left(\dfrac{q^2}{\rho} + p(\rho)\right) = -\dfrac{q^2}{a\rho}\,\partial_x a \end{cases} \qquad \begin{array}{ll} t \in \mathbf{R}^+ & \text{tempo} \\ x \in \mathbf{R} & \text{spazio} \\ \rho = \rho(t,x) & \text{densità del fluido} \\ q = q(t,x) & \text{densità della quantità} \\ & \text{di moto} \\ a = a(x) & \text{sezione del tubo} \\ p = p(\rho) & \text{pressione.} \end{array}$$

Qui, il termine di sorgente esprime proprio la variazione della sezione del tubo, la cui regolarità permette un'adeguata definizione di soluzione debole, vedi [2, Definition 2.5].

Nel caso di una sezione non continua nel sistema (1), consideriamo il problema matematico relativo ad un *giunto*, cioè il caso in cui la geometria del tubo presenti una brusca *discontinuità*, in corrispondenza, ad esempio, di $x = 0$. Più precisamente supponiamo di avere una sezione $a(x) = a^-$ per $x < 0$ e $a(x) = a^+$ per $x > 0$. Quindi consideriamo separatamente in ciascun tubo il seguente modello

$$(2) \qquad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x q = 0 \\[1ex] \partial_t q + \partial_x\left(\dfrac{q^2}{\rho} + p(\rho)\right) = 0 \end{cases}$$

con una *condizione di raccordo* in corrispondenza della discontinuità in $x = 0$,

$$(3) \qquad \Psi(a^-, (\rho,q)(t, 0-); a^+, (\rho,q)(t, 0+)) = 0,$$

che imponga requisiti fisici, come ad esempio la conservazione della massa e l'uguaglianza della pressione idrostatica $p(\rho)$, o la conservazione parziale della quantità di moto. In [2] viene introdotta una scelta della condizione Ψ motivata dal limite del caso di un giunto continuo, vedi Figura 1.

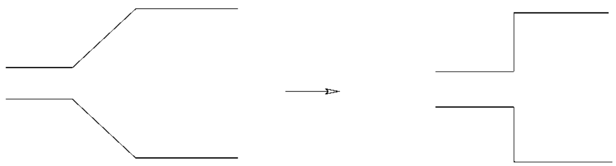

Fig. 1. – Il concetto di soluzione nel caso di una sezione continua induce la definizione di soluzione nel caso di un giunto.

Con questa definizione, proviamo la *buona posizione* del modello sopra descritto, cioè costruiamo un semigruppo L^1-Lipschitz le cui orbite siano soluzioni del corrispondente problema di Cauchy. Tale risultato viene quindi esteso ad un tubo con sezione costante a tratti e, grazie ad un *bound* sulla variazione totale della sezione, proviamo la *buona posizione* anche per il modello corrispondente ad un tubo con sezione a di classe $W^{1,1}$, vedi Figura 2. Più precisamente, attraverso un procedimento rigoroso di passaggio a limite, proviamo che il problema di Cauchy corrispondente al sistema (1) genera un semigruppo Lipschitz, sotto le ipotesi di variazione totale limitata del dato iniziale e della sezione del tubo.

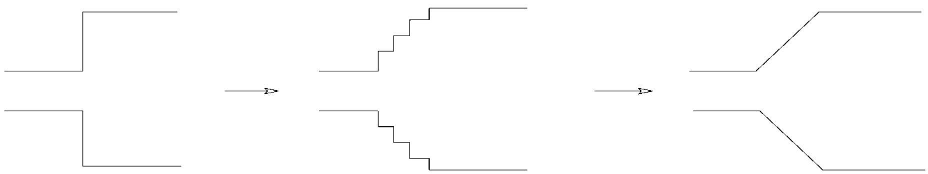

Fig. 2. – Il modello per un singolo giunto viene esteso al caso generale di un tubo con sezione costante a tratti e quindi ad un tubo con sezione a di classe $W^{1,1}$.

Si ottiene inoltre una stima esplicita del *bound* sulla variazione totale della sezione del tubo, che mostra come, a velocità più basse di fluido, siano consentiti valori più elevati per la variazione totale della sezione del tubo. Al contrario un esempio esplicito, calcolato nel caso di pressione isoterma, mostra che vicino alla velocità sonica e con una sezione con elevata variazione totale, la variazione totale della soluzione potrebbe crescere in modo arbitrario, vedi [2, sezione 2.2].

In [3], l'evoluzione di un gas in un tubo con sezione variabile viene esteso al sistema di Eulero completo, cioè ad un sistema dato da 3 leggi di conservazione. In particolare, consideriamo due tubi separati da un giunto posto in corrispondenza, ad esempio, di $x = 0$,

$$
(4)\qquad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x q = 0 \\ \partial_t q + \partial_x \left(\dfrac{q^2}{\rho} + p(\rho, e) \right) = 0 \\ \partial_t E + \partial_x \left(\dfrac{q}{\rho} (E + p(\rho, e)) \right) = 0 \end{cases}
\qquad
\begin{array}{ll}
\rho = \rho(t,x) & \text{densità di fluido} \\
q = q(t,x) & \text{quantità di moto} \\
e = e(t,x) & \text{densità di energia interna} \\
p = p(\rho, e) & \text{pressione} \\
E = \dfrac{1}{2}\dfrac{q^2}{\rho} + \rho e & \text{densità di energia totale.}
\end{array}
$$

Estendiamo i risultati provati nel caso del π−system in [2] al caso 3×3 con una *condizione di raccordo* generale in corrispondenza della discontinuità, del tipo

$$
(5)\qquad \Psi(a^-, (\rho, q, E)(t, 0-); a^+, (\rho, q, E)(t, 0+)) = 0.
$$

Con questa definizione, proviamo la *buona posizione* del problema di Cauchy per il modello sopra descritto e quindi anche l'estensione a tubi con tanti giunti ed a tubi con sezione di classe $W^{1,1}$.

Anche in tal caso, esempi espliciti mostrano la necessità di un *bound* sulla variazione totale del tubo.

In [4] si dimostra la buona posizione del problema di Cauchy per un sistema $n \times n$ strettamente iperbolico di leggi di conservazione con sorgente illimitata (in L^∞). Più precisamente si considera

$$
(6)\qquad \begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = g(x, u) \\ u(0, x) = u_o(x) \end{cases}
\qquad
\begin{array}{r}
t \in \mathbf{R}^+ \\
x \in \mathbf{R} \\
u \in \mathbf{R}^n \\
u_o \in L^1 \cap BV(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n)
\end{array}
$$

con ciascun *campo caratteristico* genuinamente nonlineare o linearmente degenere, vedi [1, Definition 5.2].

Sotto l'ipotesi di *non risonanza* $|\lambda_i(u)| \geq c > 0$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ e per ogni u e sotto l'ipotesi di limitatezza

$$
(7)\qquad |g(x, \cdot)|_{\mathbf{C}^2} \leq M(x) \text{ con } M \in L^1(\mathbf{R}; \mathbf{R}),
$$

si provano esistenza ed unicità di soluzioni globali entropiche, sotto le usuali ipotesi di variazione totale limitata del dato iniziale e di norma L^1 di $\|g(x, \cdot)\|_{\mathbf{C}^1}$ sufficientemente piccola. In letteratura un tale risultato è stato provato sotto un'ipotesi più forte di (7), cioè $M \in \big(L^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R}) \cap L^1(\mathbf{R}; \mathbf{R})\big)$. Il miglioramento di questa ultima ipotesi permette di calcolare il limite considerato nella Figura 1 anche nel caso del sitema di Eulero completo; il risultato sopra descritto viene quindi applicato ad un fluido in un tubo con sezione discontinua nel caso 3×3, mostrando esistenza, unicità e regolarità del semigruppo trovato.

Questa tesi di dottorato tratta anche di leggi di conservazione applicate ai flussi di traffico. In [5] viene introdotto un nuovo modello macroscopico a due fasi per il traffico stradale, basato su un sistema 2×2 di leggi di conservazione *non regolare*.

Consideriamo il classico modello *LWR*

$$
\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho V) = 0 \\ V = w\,\psi(\rho) \end{cases}
\qquad
\begin{array}{rl} \rho = \rho(t,x) & \text{densità di traffico} \\ V = V(w,\rho) & \text{velocità di traffico} \\ w > 0 & \text{massima velocità di traffico.} \end{array}
\tag{8}
$$

Qui la funzione Ψ descrive l'attitudine dei guidatori a scegliere la loro velocità in dipendenza della densità di traffico in corrispondenza dalla loro posizione. Inizialmente assumiamo che ciascun guidatore abbia una propria velocità massima; quindi w diventa una quantità trasportata dal traffico. Come seconda ipotesi assumiamo che esista una velocità massima $V_{\max}$ per tutti i guidatori. Quindi otteniamo il seguente modello

$$
\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho\, v(\rho,w)) = 0 \\ \partial_t w + v(\rho,w)\, \partial_x w = 0 \end{cases}
\quad \text{con} \quad v(\rho,w) = \min\{V_{\max}, w\,\psi(\rho)\},
\tag{9}
$$

che può essere scritto come un sistema 2×2 di leggi di conservazione con flusso $C^{0,1}$:

$$
\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho\, v(\rho,w)) = 0 \\ \partial_t (\rho\, w) + \partial_x (\rho\, w\, v(\rho,w)) = 0 \end{cases}
\quad \text{con} \quad v(\rho,w) = \min\{V_{\max}, w\,\psi(\rho)\}\,.
\tag{10}
$$

Si studia il *Problema di Riemann* per tale sistema e le proprietà qualitative delle soluzioni che sono rilevanti da un punto di vista dello studio del traffico. Si mostra inoltre una connessione tra questo modello ed altri descritti in letteratura (modelli macroscopici, cinetici e microscopici). Nel caso di altri modelli macroscopici sono paragonati i *diagrammi fondamentali*, fra di loro e con i dati sperimentali presenti in letteratura. In particolare, si prova rigorosamente che tale modello macroscopico può essere derivato da un modello microscopico detto *Follow the Leader*, basato su un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRESSAN A., *Hyperbolic systems of conservation laws*, Oxford lecture series in mathematics and its applications. Oxford University Press, **20** (2000).

[2] COLOMBO R.M. e MARCELLINI F., *Smooth and discontinuous junctions in the p−system*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **361** (2010), 440-456

[3] COLOMBO R.M. e MARCELLINI F., *Coupling conditions for the* 3×3 *Euler system*, Preprint, (2009).

[4] GUERRA G., MARCELLINI F. e SCHLEPER V., *Balance laws with integrable unbounded sources*, SIAM Journal of Mathematical Analysis, **41** (2009), 1164-1189.

[5] COLOMBO R.M., MARCELLINI F. e RASCLE M., *A 2−phase traffic model based on a speed bound*, Preprint (2009).

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Milano-Bicocca
e-mail: f.marcellini@campus.unimib.it
Dottorato in Matematica Pura ed Applicata
con sede presso l'Università di Milano-Bicocca – Ciclo XXII
Direttore di ricerca: Prof. Rinaldo M. Colombo, Università di Brescia