La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Nunzia Gavitone

Operatori Hessiani, simmetrizzazione e quermassintegral

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 39–42.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_39_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Aprile 2010, 39-42

Operatori Hessiani, simmetrizzazione e quermassintegral

NUNZIA GAVITONE

Nella tesi si studia una classe di operatori ellittici del secondo ordine completamente non lineari, noti come operatori k-Hessiani. Questo studio è motivato dal fatto che tali operatori intervengono in varie situazioni. ad esempio, essi intervengono nella teoria del trasporto di massa.

Sia $u \in C^2(\Omega)$, dove Ω è un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$, limitato e connesso e siano $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, gli autovalori della matrice Hessiana D^2u. L' operatore k-Hessiano, con $1 \leq k \leq n$, è definito come segue

$$S_k(D^2(u)) = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} \lambda_{i_1} \cdot \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_k}, \tag{1}$$

quindi è la somma di tutti i $k \times k$ minori principali della matrice Hessiana D^2u ed è chiaro che per $k = 1$ e $k = n$, si riduce rispettivamente all'operatore Laplaciano e all'operatore di Monge-Ampère. Le equazioni che coinvolgono operatori k-Hessiani, vengono chiamate equazioni Hessiane.

È ben noto che S_1, e quindi il Laplaciano, è ellittico. Questa proprietà non è vera in generale per $k > 1$, e le funzioni ammissibili per S_k, cioè la classe delle funzioni rispetto alle quali S_k è ellittico, è la classe delle funzioni k-convesse. Una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ si dice k-convessa (strettamente k-convessa) in Ω se

$$S_j(D^2u) \geq 0 \ (> 0) \quad \text{per } j = 1, \ldots, k.$$

La prima parte della tesi è rivolta allo studio di funzionali integrali associati agli operatori k-Hessiani, i quali generalizzano gli integrali dell'energia. Tali funzionali integrali sono chiamati integrali (p, k)-Hessiani e sono definiti come segue

$$I_{p,k}[u, \Omega] = \int_\Omega S_k^{ij}(D^2u) u_i u_j |Du|^{p-k-1}\, dx \tag{2}$$

dove $1 \leq p < \infty$, $k = 1, \cdots, n$, $u_i = \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$, e $S_k^{ij} = \dfrac{\partial S_k(D^2u)}{\partial u_{ij}}$. Per $k = 1$, gli integrali $(p, 1)$-Hessiani si riducono ai classici integrali dell'energia o di Dirichlet, infatti

$$I_{p,1}[u, \Omega] = \int_\Omega |Du|^p\, dx. \tag{3}$$

Poiché per gli integrali di Dirichlet vale la seguente disuguaglianza di Hardy-Sobolev, (si veda ad esempio [H. Egnell, Indiana Univ. Math. J. 1989] [V.G. Maz'ja, Sobolev Spaces, 1985], [B. Opic e A. Kufner, Hardy-type inequalities, 1990])

$$\left(\int_\Omega \frac{u^q}{|x|^s}\,dx\right)^{\frac{p}{q}} \le C\int_\Omega |Du|^p\,dx, \quad u\in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{4}$$

dove $1<p<n$, $0\le s<p$ e $q\le\dfrac{p(n-s)}{n-p}$ e la miglior costante C è nota (si veda ad esempio [G. Talenti, Ann. Mat. Pura Appl. 1976], [H. Egnell, Indiana Univ. Math. J. 1989]), si è affrontata la questione di trovare una disuguaglianza ottimale di tipo Hardy-Sobolev per gli integrali(p,k)-Hessiani, che estenda (4).

Uno dei primi risultati in questa direzione è contenuto in [3] e [4] in cui gli autori provano la seguente disuguaglianza di tipo Sobolev per gli integrali (p,k)-Hessiani:

$$I_{p,k}[u,\Omega]\ge C(n,p,k,\Omega)\left[\int_\Omega |u|^q\,dx\right]^{\frac{p}{q}}, \tag{5}$$

dove $q=\dfrac{pn}{n-k-p+1}$ e $1<p<n-k+1$.

Nella tesi è riportato un risultato, in cui si ottiene una disuguaglianza più generale di (5), data da

$$I_{p,k}[u,\Omega]\ge C(n,p,k,q,s,\Omega)\left[\int_\Omega \frac{|u|^q}{|x|^s}\,dx\right]^{\frac{p}{q}} \tag{6}$$

per $1<p<n-k+1$, $q\le\dfrac{p(n-s)}{n-k-p+1}$ e $0\le s<p+k-1$, trovando il miglior valore della costante.

Per il valore critico $p=n-k+1$, si ottiene la seguente disuguaglianza ottimale di tipo Hardy

$$I_{p,k}[u,\Omega]\ge\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{n-k-p+1}{p}\right)^p\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^{p+k-1}}\,dx. \tag{7}$$

Le migliori costanti in (6) e in (7), come nel caso classico, non sono assunte. Ciò ha indotto a migliorarle ottenendo il seguente risultato

$$\begin{aligned} I_{p,k}[u,\Omega]\ge&\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{n-k-p+1}{p}\right)^p\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^{p+k-1}}\,dx\\ &+C_1\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x|^{p+k-1}}\left(\frac{1}{\log\left(\frac{C}{|x|}\right)}\right)^\gamma dx \end{aligned} \tag{8}$$

con $\gamma\ge 2$.

Tutti i precedenti risultati sono contenuti in [1] e sono stati ottenuti utilizzando un appropriato argomento di simmetrizzazione. Si è considerata una classe di riordinamenti che non conservano la misura degli insiemi di livello di una funzione, ma una particolare misura di curvatura. Questa misura è chiamata quermassintegral. Per definirla, si consideri Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ limitato e connesso, $n \geq 2$, con frontiera regolare. Ω si definisce $(k-1)$-convesso se (si veda ad esempio [3])

$$H_j[\partial\Omega] = S_j(\kappa_1, \cdots, \kappa_n) \geq 0,$$

per $j = 1, \cdots, k-1$, dove κ_i denota la i^{ma} m curvatura media di $\partial\Omega$ e H_j è chiamata j-curvatura media di Ω. Il k^{mo} quermassintegral di Ω, $V_k(\Omega)$, è definito da (si veda ad esempio [3])

$$V_k(\Omega) = \frac{1}{n\binom{n-1}{k-1}} \int_{\partial\Omega} H_{k-1}(\partial\Omega)\, d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{9}$$

dove $k = 1, \cdots, n$ e $\mathcal{H}^{n-1}$ denota la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale in $\mathbb{R}^n$.

Se $u : \Omega \to]-\infty, 0]$ è una funzione con gli insiemi di sottolivello $\Omega_t = \{u < t\}$ convessi, e Ω è un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ limitato e connesso, con frontiera regolare allora la k-simmetrizzata di u, per $k = 0, \cdots, n-1$, è definita da (si veda ad esempio [3])

$$u_k^*(x) = \sup\left\{ t \leq 0 : \left(\frac{V_k(\Omega_t)}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-k}} \leq |x|, Du \neq 0 \text{ on } \Sigma_t \right\}, \quad x \in B_R \tag{10}$$

dove B_R è una palla, centrata nell'origine e di raggio $R = \xi_k(\Omega)$, avente quindi, lo stesso k-quermassintegral di Ω.

Nella seconda parte della tesi, si è considerato il problema agli autovalori associato all' operatore k-Hessiano

$$\begin{cases} S_k(D^2 u) = \lambda(-u)^k \text{ in } \Omega \\ u = 0 \text{ su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{11}$$

In [4], è stato provato che se Ω è $(k-1)$ strettamente convesso, esiste una costante positiva λ_k che dipende solo da n, k, e Ω, tale che il problema (11) ammette una soluzione negativa $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^{1,1}(\overline{\Omega})$ per $\lambda = \lambda_k$.

λ_k è detto autovalore dell' operatore k-Hessiano e u è una sua autofunzione.

Nella tesi è contenuto un risultato ottenuto in [2] dove si prova una disuguaglianza di tipo Faber-Krahn per λ_k. Sia Ω un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$ limitato e strettamente convesso; se $\lambda_k(\Omega)$ è l'autovalore di (11) e $\lambda_k(\Omega^*_{k-1})$ è l'autovalore del seguente problema

$$\begin{cases} S_k(D^2(v)) = \lambda(-v)^k & \text{in } \Omega^*_{k-1} \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega^*_{k-1} \end{cases} \tag{12}$$

dove Ω^*_{k-1} è la palla centrata nell'origine e avente lo stesso $(k-1)^{\mathrm{mo}}$-quermassintegral di Ω, allora

$$\lambda_k(\Omega) \geq \lambda_k(\Omega^*_{k-1}). \tag{13}$$

questa disuguaglianza è isoperimetrica, ossia l'uguaglianza vale se e solo se Ω è una palla.

Si ottiene anche una disuglianza di Holder inversa, anche nota come disuguaglianza di Payne-Rayner, per le autofunzioni, che, per la prima autofunzione del Laplaciano, è la seguente

$$\|u\|_r \leq K(r, q, n, \lambda_1)\|u\|_q \tag{14}$$

per $0 < q < r < +\infty$, $n \geq 2$, e dove K è una positiva costante non dipendente da u, e K è ottimale.

Per le autofunzioni dell'operatore k-Hessiano, utilizzando la simmetrizzazione per quermassintegral, si è ottenuta la seguente disuguaglianza di tipo Payne-Rayner

$$\left(\int_0^{V_{k-1}(\Omega)} r^{\frac{n}{n-k+1}-1}(-\tilde{u}_{k-1})^p\,dr \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(n, p, q, k, \lambda_k) \left(\int_0^{V_{k-1}(\Omega)} r^{\frac{n}{n-k+1}-1}(-\tilde{u}_{k-1})^q\,dr \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{15}$$

dove u è una soluzione di (11) con insiemi di livello convessi. La (15) vale come uguaglianza se e solo se Ω è una palla. Quindi al secondo membro non si ottiene una norma in L^q della funzione u ma una sorta di norma pesata. Ciò è dovuto al fatto che si è utilizzata la simmetrizzazione per quermassintegral che a differenza di quella fatta rispetto alle aree degli insiemi di livello, non preserva le norme L^q.

BIBLIOGRAFIA

[1] N. GAVITONE, *Hardy-Sobolev type inequalities for Hessian Integrals*, Boll. UMI, **10-B**, (8) (2007), 951-967.

[2] N. GAVITONE, *Isoperimetric estimates for eigenfunctions of Hessian operators*, Ricerche Mat., 58 (2009), 163-183.

[3] N. S. TRUDINGER, *On new isoperimetric inequalities and symmetrization*, J. Reine Angew. Math., 488 (1997), 203-220.

[4] X. J. WANG, *A class of fully nonlinear elliptic equations and related functionals*, Indiana Univ. Math. J., 43 (1994), 25-54.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università di Napoli "Federico II"
e-mail: nunzia.gavitone@unina.it
Dottorato in Scienze Computazionali e Informatiche
con sede presso l'Università di Napoli "Federico II" - Ciclo XX
Direttore di ricerca: Prof. V. Ferone, Università di Napoli "Federico II"