
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PAOLO FRASCA

Ottimizzazione distribuita con vincoli di comunicazione

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 3 (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 35-37.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_35_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

Ottimizzazione distribuita con vincoli di comunicazione

PAOLO FRASCA

1. – Introduzione

Questa tesi riguarda problemi di ottimizzazione e controllo da risolversi collettivamente (ovvero, in modo distribuito) da parte di gruppi di “agenti” collegati in rete (processori, sensori, o veicoli), i quali abbiano risorse di calcolo e comunicazione limitate. Conseguentemente, essa si colloca fra la teoria del controllo e dell’ottimizzazione e la teoria dell’informazione: gli aspetti di teoria dei grafi e matematica discreta hanno un ruolo fondamentale. Tale tema di ricerca, che ha negli ultimi anni attratto un considerevole interesse, sia teorico che applicativo, origina principalmente da studi degli anni ottanta [7], quando si è iniziato a comprendere il ruolo dei vincoli di comunicazione nei problemi di controllo e di ottimizzazione. Recentemente, l’interesse si è risvegliato in vista delle applicazioni ingegneristiche al progetto di algoritmi per reti di sensori e per il moto coordinato di veicoli senza pilota.

Gli strumenti matematici per affrontare simili problemi sono spesso nuovi, o di uso non standard, e provengono da rami anche distanti della matematica moderna: teoria spettrale dei grafi, combinatoria, catene di Markov e processi stocastici, analisi reale e teoria dell’integrazione, analisi *set-valued*. Poiché l’argomento della tesi si trova alla confluenza di controllo, ottimizzazione, informatica e teoria dell’informazione, molte tecniche originano da questi campi. I metodi classici di ottimizzazione sono ovviamente un punto di riferimento. Inoltre, sono utili risultati di stabilità e controllo con retroazione, per esempio basati su funzioni di Liapunov, anche riguardo alle inclusioni differenziali e ai sistemi ibridi. Altri strumenti matematici sono, invece, specifici dei problemi distribuiti: per esempio, la teoria dei grafi, in quanto i possibili canali di comunicazione fra gli agenti sono naturalmente descrivibili tramite un grafo, e ci sono relazioni interessanti fra le prestazioni degli algoritmi e le proprietà, soprattutto dal punto di vista spettrale, del grafo di comunicazione. Più in generale, un ruolo importante è assunto dalla matematica discreta e dalla combinatoria, anche per l’applicazione a sistemi digitali, i quali naturalmente richiedono di considerare insiemi finiti (o al più numerabili) di stati, ingressi e uscite. Nell’ambito, i metodi probabilistici sono molto utili, poiché le prestazioni degli algoritmi vengono sovente valutate su istanze casuali e alcuni degli algoritmi stessi sono stocastici. Inoltre, i problemi di consenso hanno un legame naturale con il problema classico della passeggiata casuale su un grafo.

La tesi si concentra su due problemi paradigmatici, il problema del consenso e il problema della copertura ottima. Illustriamo dunque questi due problemi, e il contributo della tesi a proposito.

2. – Consenso con comunicazione quantizzata

Il problema del consenso (in inglese, *consensus*) consiste nel calcolare una funzione, in molti casi la media aritmetica, di valori inizialmente noti ai singoli agenti. Tale problema è suscettibile di applicazioni a problemi di calcolo, stima e decisione distribuita, per esempio da parte di reti di sensori. È evidente come in questo caso l'essenza della difficoltà stia nel carattere distribuito del sistema, ovvero nei vincoli di comunicazione: se tutta l'informazione fosse condivisa globalmente, il problema sarebbe banale. L'algoritmo elementare per la sua risoluzione distribuita prevede che ogni agente, partendo dal proprio valore iniziale, iterativamente aggiorni una stima della funzione di interesse, calcolando una media pesata della propria stima corrente e delle stime dei suoi vicini sul grafo di comunicazione: è facile dimostrare, per esempio tramite il Teorema di Perron-Frobenius, che la stima posseduta da ogni agente converge asintoticamente alla media dei valori iniziali, purché il grafo sia connesso [6, 3].

Molta letteratura al riguardo, almeno fino al 2006, assume che le stime, che in generale sono numeri reali, siano comunicabili come tali in modo istantaneo e affidabile. Tale modello è naturalmente restrittivo per una risoluzione del problema in un caso reale, in cui i valori numerici sono gestiti e comunicati con precisione finita, tramite un processo che è soggetto ad errori. Il contributo della tesi riguarda principalmente il vincolo di precisione finita imputabile a comunicazioni digitali, in cui il messaggio è quantizzato, cioè appartiene ad un insieme discreto. Lo studio ha portato [5, 2] al progetto di algoritmi adattati a tale vincolo, in particolare di mappe di quantizzazione deterministiche o aleatorie, e di protocolli di comunicazione e di aggiornamento delle stime. Per gli algoritmi proposti si è valutato il degrado delle prestazioni rispetto al caso ideale. Tale degrado riguarda principalmente la precisione ottenibile asintoticamente nella stima della media dei valori iniziali: in generale essa dipende, oltre che dalla precisione consentita nelle comunicazioni e dalla mappa di quantizzazione scelta, dalla topologia della rete di comunicazione. In particolare, si è studiato il caso in cui la comunicazione (quantizzata) sia sincrona attraverso tutti gli archi del grafo [5], e il caso in cui sia vincolata ad avvenire fra coppie di agenti (algoritmo “gossip”) [2].

3. – Copertura ottima

Il problema della copertura (in inglese, *coverage*) consiste nel disporre in modo ottimo in un dato ambiente un certo numero di automi (o sensori) semoventi: più precisamente, si vogliono progettare algoritmi tali per cui il gruppo di agenti mobili sia in grado di configurarsi in modo ottimo autonomamente, sfruttando le proprie capacità di percezione, calcolo e comunicazione.

Il problema di ottimizzazione può essere scritto in termini di una funzione obiettivo da minimizzare, la quale dipende dalle posizioni degli agenti: in particolare, sulla base di esse viene calcolata la partizione di Voronoi dello spazio ambiente, e ad ogni agente viene attribuita la pertinenza di una regione, che è il poligono di Voronoi

che lo contiene. L'algoritmo di ottimizzazione delle posizioni, detto algoritmo di Lloyd, richiede l'iterazione di fasi di calcolo della tassellazione di Voronoi, e di spostamento di ogni agente verso il centroide geometrico della propria regione. Per i dettagli riguardo tale approccio, ormai consolidato, rimandiamo il lettore a [4, 1].

Nella tesi si è sviluppato un approccio nuovo al problema: invece di concentrarci sulle posizioni degli agenti e sulle partizioni di Voronoi, ci concentriamo sull'ottimizzazione di una generica partizione dell'ambiente dato in regioni, ognuna delle quali assegnata a un agente. L'ottimalità di una partizione è definita in termini dell'efficacia con cui ogni agente controlla la propria regione. Questa estensione consente di considerare regioni di pertinenza che non siano regioni di Voronoi, ed apre la strada a modelli di comunicazione molto generali. Infatti, il calcolo di una partizione di Voronoi richiede lo scambio di informazioni contemporaneo fra ogni agente e i propri vicini nel grafo di Delaunay associato alla partizione. Qualora invece le regioni non siano necessariamente di Voronoi, sono possibili aggiornamenti con comunicazioni, per esempio, a coppie o asimmetriche. Con particolare riferimento alle comunicazioni a coppie (dette "gossip"), le proprietà di convergenza dell'algoritmo sono state studiate tramite risultati di interesse indipendente, fra cui una estensione del principio di invarianza di LaSalle a mappe "switching" fra spazi metrici.

BIBLIOGRAFIA

- [1] F. BULLO, J. CORTÉS and S. MARTÍNEZ, *Distributed Control of Robotic Networks*. Applied Mathematics Series. Princeton University Press 2009.
- [2] R. CARLI, F. FAGNANI, P. FRASCA and S. ZAMPIERI, *Gossip consensus algorithms with quantized communication*. Automatica 2009 To appear (Submitted Jan. 2009).
- [3] R. CARLI, F. FAGNANI, A. SPERANZON and S. ZAMPIERI, *Communication constraints in the average consensus problem*. Automatica, **44** (2008), 671-684.
- [4] J. CORTÉS and F. BULLO, *Nonsmooth coordination and geometric optimization via distributed dynamical systems*. SIAM Review, **51** (2009), 163-189.
- [5] P. FRASCA, R. CARLI, F. FAGNANI and S. ZAMPIERI, *Average consensus on networks with quantized communication*. International Journal of Robust and Nonlinear Control, **19** (2009), 1787-1816.
- [6] R. OLFATI-SABER, J. A. FAX and R. M. MURRAY, *Consensus and cooperation in networked multi-agent systems*. Proceedings of the IEEE, **95** (2007), 215-233.
- [7] J. N. TSITSIKLIS, D. P. BERTSEKAS and M. ATHANS, *Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms*. IEEE Transactions on Automatic Control, **31** (1986), 803-812.

Istituto per le Applicazioni del Calcolo - C.N.R., Roma
e-mail: paolo.frasca@gmail.com

Dottorato in Matematica per le Scienze dell'Ingegneria
con sede presso il Politecnico di Torino – Ciclo XXI

Direttori di ricerca: prof. Fabio Fagnani, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino e
prof. Sandro Zampieri, DEI, Università di Padova

