La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Rosaria Di Nardo

Equazioni ellittiche e paraboliche non lineari con dato misura

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 27–30.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_27_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Aprile 2010, 27-30

Equazioni ellittiche e paraboliche non lineari con dato misura

ROSARIA DI NARDO

L'obiettivo principale della tesi è studiare l'esistenza e l'unicità di soluzioni di problemi al bordo per equazioni ellittiche o paraboliche non lineari nel caso in cui i dati siano funzioni solo sommabili o misure. A tal scopo consideriamo una classe di problemi di Dirichlet per equazioni ellittiche non lineari del tipo:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) = \mu & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{su} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

dove Ω è un insieme aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione di Carathéodory tale che

$$a(x,s,\xi)\xi \geq a|\xi|^p, \quad a > 0, \tag{2}$$

$$|a(x,s,\xi)| \leq \left[|\xi|^{p-1} + |s|^{p-1} + a_0(x)\right], \quad a_0(x) \in L^{p'}(\Omega), \tag{3}$$

$$(a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta), \xi - \eta) > 0, \quad \xi \neq \eta \tag{4}$$

q.o. $x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}, \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N$.

Quando il dato μ appartiene allo spazio duale di $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'esistenza e l'unicità di una soluzione debole del problema (1) è conseguenza della teoria classica degli operatori monotoni dovuta a Leray e Lions (1965).

Se il dato μ è una misura, occorre dare un senso alla nozione di soluzione. L'idea naturale è quella di pensare alla soluzione nel senso delle distribuzioni. Tuttavia il classico controesempio di Serrin (1964) mostra che essa non è in generale unica. Per questa ragione è stato necessario introdurre una nuova nozione di soluzione che assicurasse sia l'esistenza che l'unicità.

Nel caso lineare, Stampacchia (1965) dimostra l'esistenza e l'unicità di una soluzione definita per dualità che soddisfa l'equazione nel senso distribuzionale. Nel caso non lineare, i primi risultati di esistenza sono dovuti a Boccardo e Gallouët (1989); essi provano l'esistenza di una soluzione nel senso delle distribuzioni per il problema (1) che appartiene allo spazio $W_0^{1,q}(\Omega)$, per $q < \dfrac{N(p-1)}{N-1}$ nelle ipotesi in cui $2 - \dfrac{1}{N} < p < N$. L'ipotesi su p è motivata dal fatto che, se $p \leq 2 - \dfrac{1}{N}$, allora $\dfrac{N(p-1)}{N-1} \leq 1$. La dimostrazione del risultato di esistenza si basa su un naturale processo di approssimazione: l'idea consiste nel trovare una soluzione come limite di una successione di soluzioni deboli dei problemi approssimanti i cui dati sono funzioni regolari e che approssimano il dato μ . Essa viene denominata da Dall'Aglio (1996) "Soluzione Ottenuta mediante Limite di Approssimazioni".

Sono note in letteratura altre nozioni di soluzione quali la soluzione di entropia (cfr. [Ph. Bénilan, L. Boccardo, Th. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J.L. Vázquez, 1995], [L. Boccardo, Th. Gallouët, G. Orsina, 1996]) e la soluzione rinormalizzata (cfr. [P. L. Lions e F. Murat, preprint], [F. Murat, 1993], [F. Murat, 1994]).

Segnaliamo infine che il caso $p = N$ è stato studiato in [G. Dolzmann, N. Hungerbühler, S. Müller, 2000], [A. Fiorenza, C. Sbordone, 1998], [L. Greco, T. Iwaniec, C. Sbordone, 1997].

I risultati sopra citati sono stati estesi nella tesi al caso di equazioni ellittiche o paraboliche non lineari dotate di termini di ordine inferiore. Consideriamo la classe di problemi di Dirichlet per equazioni ellittiche non lineari del tipo

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,\nabla u)) - \operatorname{div}(\Phi(x,u)) = \mu & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

dove $a : (x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \to a(x,z) \in \mathbb{R}^N$ è una funzione di Carathéodory tale che:

$$a(x,\xi)\cdot\xi \geq \lambda|\xi|^p, \quad |a(x,\xi)| \leq \Lambda|\xi|^{p-1}+C, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \lambda, \Lambda > 0,$$

con $2 - \dfrac{1}{N} < p < N$ e

$$(\mathbf{a}(x,\xi) - \mathbf{a}(x,\eta))\cdot(\xi-\eta) \geq \beta\frac{|\xi-\eta|^2}{(|\xi|+|\eta|)^{2-p}}, \quad \beta > 0, \quad 2-\frac{1}{N} < p < 2, \tag{6}$$

$$(\mathbf{a}(x,\xi) - \mathbf{a}(x,\eta))\cdot(\xi-\eta) \geq \delta(1+|\xi|+|\eta|)^{p-2}|\xi-\eta|^2, \quad \delta > 0, \quad p \geq 2, \tag{7}$$

q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ e $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N$, $\xi \neq \eta$.

Inoltre $\Phi : (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}^N \to \Phi(x,s) = (\Phi_i(x,s)) \in \mathbb{R}^N$ è una funzione di Carathéodory, differenziabile rispetto ad s, tale che

$$|\Phi_s(x,s)| \leq c(x)(1+|s|)^{\gamma-1}, \qquad c(x) > 0,$$

$$c(x) \in L^r(\Omega), \quad r > \frac{N}{p-1}, \quad 1 \leq \gamma \leq p-1, \quad p \geq 2,$$

$$c(x) \in L^r(\Omega), \quad r > \frac{N(p-1)}{1+N(p-2)}, \quad 1-\frac{1}{N} < \gamma < p-1, \quad 2-\frac{1}{N} < p < 2$$

ed infine μ è una funzione $\in L^1(\Omega)$.

Risultati di esistenza per il problema (5) sono stati provati in [T. Del Vecchio, 1995], [T. Del Vecchio, M. R. Posteraro, 1996] mediante le classiche tecniche di simmetrizzazione, in [M. F. Betta, A. Mercaldo, F. Murat, M.M. Porzio, 2003], [O. Guibé, A. Mercaldo, 2006], [O. Guibé, A. Mercaldo, 2008], [M. Ben Cheikh Ali, O. Guibé, 1999] per soluzioni rinormalizzate, in [Boccardo, preprint] per soluzioni di entropia e infine in [A. Alvino, A. Mercaldo, 2008] per “Soluzione Ottenuta come Limite di Approssimazioni” .

In [2] dimostriamo un risultato di unicità di una “Soluzione Ottenuta come Limite di Approssimazioni” per il problema (5). Esso è conseguenza di un risultato di continuità della soluzione rispetto ai dati fondato sull’ipotesi che a sia un operatore fortemente monotono ovvero soddisfi le ipotesi (6)-(7) e che la funzione Φ sia

Lipschitziana localmente continua. La dimostrazione si basa sulla scelta di un'opportuna funzione test, costruita sugli insiemi di livello della soluzione e fa utilizzo delle tecniche di simmetrizzazione classiche.

Nel lavoro [1] è stato affrontato lo studio dell'esistenza di soluzioni rinormalizzate per equazioni ellittiche che soddisfano una condizione di ellitticità degenere. Precisamente si è considerato il problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + H(x,\nabla u) = \mu & \text{in} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{su} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{8}$$

dove $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione di Carathéodory verificante l'ipotesi (4) e

$$a(x,s,\xi)\xi \geq \nu(x)|\xi|^p,$$
$$|a(x,s,\xi)| \leq \nu(x)\left[|\xi|^{p-1} + |s|^{p-1} + a_0(x)\right], \; a_0(x) \in L^{p'}(\nu),$$

q.o. per $x \in \Omega$, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, $\nu(x)$ è una funzione non negativa tale che

$$\nu(x) \in L^r(\Omega), r \geq 1, \quad \frac{1}{\nu(x)} \in L^t(\Omega), \quad t \geq \frac{N}{p}, \quad 1 + \frac{1}{t} < p < N\left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

Inoltre $H : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è una funzione di Carathéodory tale che

$$|H(x,\xi)| \leq b(x)|\xi|^{p-1}, \quad b(x) \in L^\tau(\Omega), \; \tau > \frac{p'\widetilde{p}t}{t-(t+1)(p'+\widetilde{p})},$$

dove $\widetilde{p}$ è definita da

$$\widetilde{p} = \frac{p^\#}{r'} \text{e} \quad (p^\#)^{-1} = p^{-1}(1+1/t) - N^{-1}.$$

Risultati di esistenza per equazioni ellittiche degeneri sono stati dimostrati da J-M. Rakotoson (1993) e da M. F. Betta, T. Del Vecchio, M. R. Posteraro (1998). In [1] si ottiene l'esistenza di soluzioni rinormalizzate adattando al caso degenere un metodo introdotto da Bottaro-Marina (1973) utilizzato poi in seguito in [M. F. Betta, A. Mercaldo, F. Murat, M.M. Porzio, 2003] nel caso di operatori uniformemente ellittici. L'idea consiste nel considerare dapprima una successione di problemi approssimanti i cui dati sono funzioni regolari e che approssimano μ. Allo scopo poi, di ottenere delle stime a priori per le soluzioni deboli u_n di tali problemi, si considera inizialmente l'eventualità in cui la norma di b è piccola; in tal caso, usando $T_k(u)$ come funzione test in (8), si ottiene facilmente una stima a priori per il gradiente di u_n. Se la norma di b non è piccola, si riconduce, in qualche senso, il problema ad un numero finito di problemi con norma di b piccola e si ottiene nuovamente una stima a priori. Le stime a priori ottenute permettono infine di passare al limite nei problemi aprossimanti.

Infine, è stato affrontato lo studio dell'esistenza di soluzioni di problemi di Cauchy-Dirichlet per equazioni paraboliche non lineari del tipo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(a(x,t,u,\nabla u)) - \operatorname{div}(K(x,t,u)) = \mu & \text{in} \quad Q_T \\ u(x,t) = 0 & \text{su} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in} \quad \Omega, \end{cases} \tag{9}$$

dove $a(x,t,s,\xi) : \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione di Carathéodory tale che

$$a(x,t,s,\xi)\xi \geq a|\xi|^p, \quad a > 0,$$

$$|a(x,t,s,\xi)| \leq \left[h(x,t) + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}\right], \quad h(x,t) \in L^{p'}(Q_T),$$

$$(a(x,t,s,\xi) - a(x,t,s,\rho), \xi - \rho) > 0, \qquad \xi \neq \rho$$

q. o. $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$ e $\forall s \in \mathbb{R}$, ξ, $\rho \in \mathbb{R}^N$.

Inoltre $K : \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione di Carathéodory tale che

$$|K(x,t,\eta)| \leq c(x,t)|\eta|^\gamma, \quad \gamma = \frac{N+2}{N+p}(p-1), \quad c(x,t) \in (L^\tau(Q_T))^N, \quad \tau = \frac{N+p}{p-1},$$

$$\mu \in L^1(Q_T), \quad u_0 \in L^1(\Omega).$$

Quando $\mu \in L^{p'}(Q_T)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$ il problema ammette un'unica soluzione che appartiene allo spazio $C(0,T;L^2(\Omega))$. Se i dati sono funzioni $L^1(Q_T)$ o, più in generale misure, occorre definire una nuova nozione di soluzione. Le nozioni di "Soluzione Ottenuta come Limite di Approssimazioni", soluzione rinormalizzata, soluzione di entropia sono state estese al caso parabolico. In [D. Blanchard, F. Murat, 1997], [A. Prignet, 1997] sono stati dimostrati risultati di esistenza nel caso di operatori parabolici senza termini di ordine inferiore, mentre in [Porzio, 1999] è stato studiato un problema parabolico con un termine di ordine inferiore del tipo $b(x,t)|\nabla u|^{p-1}$.

In [3] è stata ottenuta l'esistenza di una soluzione rinormalizzata per il problema (9). Il risultato è ottenuto adattando la tecnica utilizzata da Bottaro-Marina (1973) (cfr. [M. F. Betta, A. Mercaldo, F. Murat, M.M. Porzio], 2002). Il passaggio al limite è stato effettuato seguendo la stessa procedura utilizzata in [D. Blanchard, F. Murat and H. Redwane, 2001].

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Di Nardo, *Non-uniformly elliptic equations with measure data*, Rend. Acc. Sci. fis. Mat. Napoli, Vol. **LXXIII** (2006), 423-456.

[2] R. Di Nardo, A. Perrotta, *An approach via symmetrization methods to nonlinear elliptic problems with lower order term*, accettato per la pubblicazione su "Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo".

[3] R. Di Nardo, *Nonlinear parabolic equations with a lower order term*, accettato per la pubblicazione su Communication on Pure and Applied Analysis.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli",
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
email: rosaria.dinardo@unina.it
Dottorato in Matematica con sede presso l'Università di Napoli – Ciclo XX
Direttore di Ricerca: Prof. Vincenzo Ferone, Università di Napoli "Federico II"