La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Francesca Collet

L'effetto del disordine nella dinamica critica di alcuni modelli a campo medio

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 23–26.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_23_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Aprile 2010, 23-26

L'effetto del disordine nella dinamica critica di alcuni modelli a campo medio

FRANCESCA COLLET

Nei sistemi di particelle a campo medio ogni particella interagisce con tutte le altre allo stesso modo, pertanto non vi è alcuna geometria nello spazio delle configurazioni. Solitamente tali modelli sono trattabili analiticamente e risulta piuttosto facile ricavare le loro equazioni macroscopiche. Anche se l'ipotesi di interazione "tutti-con-tutti" può sembrare troppo semplicistica per descrivere sistemi fisici dove geometria ed interazione a corta portata sono coinvolte, i modelli a campo medio sono stati recentemente applicati nelle scienze sociali [1] ed in finanza [3], [4].

Il quadro generale in cui si inserisce questo lavoro è il seguente.
Si consideri un sistema di N particelle interagenti a campo medio che si evolve come una catena di Markov a tempo continuo sullo spazio degli stati. Una volta definita la misura empirica

$$\rho_N := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_{j\text{-esima variabile di stato}},$$

si dice "parametro d'ordine" una funzione di quest'ultima, la cui evoluzione è markoviana. Un dato sistema può ammettere o meno un parametro d'ordine di dimensione finita. Dopo aver scelto opportunamente un parametro d'ordine, con tecniche di Grandi Deviazioni se ne ricava la dinamica nel limite per $N \longrightarrow +\infty$, in un intervallo di tempo fissato $[0, T]$. Quindi se ne studia il comportamento per tempi lunghi. Ciò non è necessariamente equivalente allo studio della misura stazionaria per N grande, che consisterebbe nel mandare t all'infinito per N fissato, e poi far tendere all'infinito anche N. In questo approccio, si rovescia l'ordine di tali limiti. In alcuni regimi questi due modi di procedere risultano essere equivalenti. Il punto di vista dinamico ha il vantaggio che permette di trattare anche sistemi non reversibili. Quando il volume del sistema è infinito, la dinamica limite del parametro d'ordine risulta deterministica (descritta da un'equazione differenziale ordinaria) e, al variare dei parametri del sistema, presenta una transizione di fase, che consiste nella comparsa di più equilibri stabili. Quando i parametri assumono valori per cui esiste un'unica soluzione stazionaria si dice che il sistema è in regime sottocritico; altrimenti, nel caso di più equilibri stabili, si è in un regime sopracritico.

Le fluttuazioni del parametro d'ordine attorno alla sua dinamica limite presentano caratteristiche differenti a seconda che il tempo sia o meno riscalato con N.

Se non viene eseguito alcun riscalamento e si considera l'evoluzione nell'intervallo $[0,T]$ con T fissato, il parametro d'ordine soddisfa un teorema del limite centrale in tutti i regimi; cioè, le sue fluttuazioni convergono ad un processo gaussiano, che è la soluzione (unica) di un'equazione di diffusione lineare. Quando invece il tempo viene riscalato in modo che T tenda all'infinito con N, si possono osservare comportamenti diversi.

- In regime sopracritico, ci si aspetta fenomeni di metastabilità; in altre parole, il sistema può trascorrere un tempo molto lungo in un intorno di un insieme di configurazioni che corrispondono ad un equilibrio stabile della dinamica limite e poi spostarsi bruscamente in un intorno di un altro equilibrio. Il tempo d'attesa per questo cambiamento è di ordine esponenziale in N.
- In regime sottocritico, il teorema del limite centrale vale uniformemente nel tempo. Pertanto, riscalando il tempo, si ottiene semplicemente un teorema del limite centrale per la misura stazionaria.
- In regime critico, quando i parametri del sistema prendono valori nella frontiera tra regime sopra e sottocritico, le fluttuazioni hanno un particolare riscalamento spazio-temporale (*fluttuazioni critiche*) e la distribuzione del loro limite può non essere gaussiana. Più in generale, si può parlare di fluttuazioni critiche ogni qualvolta una soluzione stazionaria della dinamica limite diventa linearmente neutralmente stabile.

In questa tesi analizziamo la dinamica delle fluttuazioni critiche in alcuni modelli a campo medio con disordine.
Consideriamo un modello a campo medio e aggiungiamo un ambiente aleatorio sito-dipendente e i.i.d., che agisce come disomogeneità nella struttura del sistema. Lo scopo è quello di analizzare l'effetto provocato dall'aggiunta di tale disordine nella dinamica delle fluttuazioni critiche, confrontandole con le analoghe per il sistema omogeneo. Ci occupiamo di alcuni specifici sistemi di spin e di diffusioni interagenti: il modello di Curie-Weiss con disordine (Capitoli 1 e 5); un modello di spin-flip non reversibile motivato da un problema di Finanza (Capitolo 2); il modello di Kuramoto disordinato e non (Capitoli 4 e 3 rispettivamente).

Diamo ora un'idea della strategia utilizzata per determinare la dinamica delle fluttuazioni critiche. La dinamica limite (deterministica) del parametro d'ordine è descritta da un operatore non lineare $\mathcal{L}$, la cui linearizzazione attorno ad un equilibrio stabile dà origine all'operatore linearizzato $\mathfrak{L}$ (esso è legato anche alle fluttuazioni gaussiane del processo). In regime critico tale operatore ha un autovalore con parte reale nulla, mentre tutti gli altri elementi dello spettro hanno parte reale negativa. L'autospazio dell'autovalore immaginario puro è un sottospazio dello spazio in cui vive il parametro d'ordine, viene chiamato *direzione critica* e solitamente ha una dimensione "piccola". I fenomeni critici riguardano le medie empiriche che corrispondono a questo sottospazio. Di conseguenza, l'analisi si sviluppa come segue.

- Individuare la direzione critica.
- Determinare il corretto scaling spazio-temporale per le fluttuazioni critiche. Ciò richiede un'approssimazione dell'evoluzione temporale del parametro d'ordine che va oltre l'approssimazione normale.
- Dimostrare che il processo di fluttuazione riscalato va a zero lungo tutte le direzioni non critiche. Lo studio si basa sul metodo dei "processi collassanti". Sviluppato da Comets e Eisele in [2] per un sistema di spin interagenti con un'interazione di tipo geometrico a lunga portata e precedentemente applicato a modelli di spin senza disordine, viene da noi esteso ai sistemi di diffusioni (i dettagli sono esposti nel capitolo 3). Ciò richiede un adeguato controllo sull'intero spettro di $\mathfrak{L}$.
- Determinare la dinamica limite lungo la direzione critica, usando la teoria perturbativa per processi di Markov (vedi [5]) e argomenti di compattezza applicati ad un opportuno problema alle martingale.

Nel caso in cui il parametro d'ordine sia infinito dimensionale, l'analisi spettrale dell'operatore $\mathfrak{L}$ può essere difficile, soprattutto nel caso in cui tale operatore non sia autoaggiunto in un opportuno spazio di Hilbert. Per questo motivo, nei primi due capitoli della tesi vengono trattati modelli i cui parametri d'ordine sono di dimensione piccola. Questi modelli sono sistemi di spin con disordine, dove sia lo spin che l'ambiente sono descritti da variabili aleatorie che prendono valori in $\{-1, +1\}$. L'analisi delle fluttuazioni, critiche e non, è ottenuta diagonalizzando una matrice di piccole dimensioni e quindi provando convergenza debole per un processo finito dimensionale. Di questi modelli abbiamo trattato direttamente l'analisi dei sistemi disordinati; il caso omogeneo si tratta in modo analogo ed è più semplice.
Nei capitoli 3 e 4 studiamo un sistema di rotatori accoppiati con evoluzione diffusiva, il modello di Kuramoto. In questo caso il parametro d'ordine ha dimensione infinita sia nel caso disordinato che non. I problemi di determinare la direzione critica e di descrivere le fluttuazioni critiche sono considerevolmente più ardui. Per questo motivo prima ci occupiamo del modello omogeneo (capitolo 3) e successivamente di quello disordinato, sotto qualche ipotesi sulla distribuzione dell'ambiente aleatorio. La teoria perturbativa per processi di Markov ricopre un ruolo chiave per la determinazione del processo limite delle fluttuazioni critiche.
Infine, nel capitolo 5, prendiamo nuovamente in considerazione il modello di Curie-Weiss. Il metodo perturbativo presentato nel capitolo 3, applicato a questo modello, ci permette di indebolire considerevolmente le assunzioni fatte nel capitolo 1 sulla distribuzione del disordine.

Da un punto di vista qualitativo, i nostri risultati indicano che quando viene aggiunto il disordine i sistemi di spin e i rotatori non appartengono alla stessa classe di universalità, cosa che invece accade per gli analoghi modelli omogenei. Nei sistemi di spin, al punto critico, il disordine ha un effetto prevalente: le fluttuazioni critiche emergono su una scala temporale di ordine $N^{1/4}$, più breve rispetto a quella del caso ordinato che è di ordine $N^{1/2}$, e la loro stocasticità è governata dal disordine. Al contrario, per i rotatori la scala temporale su cui emergono le fluttuazioni critiche non viene modificata dall'ambiente aleatorio e le caratteristiche della distribuzione non Gaussiana di tali fluttuazioni rimangono invariate. L'effetto del disordine è una sorta di "deformazione": la direzione critica viene modificata e diventa disordine-dipendente.

BIBLIOGRAFIA

[1] BROCK W. A. e DURLAUF S. N., *Discrete choice with social interactions*, Review of Economic Studies, **68** (2001), 235-260.

[2] COMETS F. e EISELE T., *Asymptotic dynamics, noncritical and critical fluctuations for a geometric long-range interacting model*, Communications in Mathematical Physics, **118** (1988), 531-567.

[3] FREY R. e BACKHAUS J., *Pricing and hedging of portfolio credit derivatives with interacting default intensities*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, **11** (2008), 611-634.

[4] LASRY J.-M. e LIONS P.-L., *Mean field games*, Japanese Journal of Mathematics, **2** (2007), 229-260.

[5] PAPANICOLAOU G. C., STROOCK D. e VARADHAN S. R. S., *Martingale approach to some limit theorems*, Papers from the Duke Turbulence Conference (Duke University, Durham, N.C., 1976), Paper No. 6, 1977.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università di Padova
e-mail: fcollet@math.unipd.it
Dottorato in Matematica Computazionale
con sede presso l'Università di Padova – Ciclo XXI
Direttore di Ricerca: Prof. Paolo Dai Pra, Università degli Studi di Padova