La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Davide Barbieri

Approssimazioni di norme di Sobolev in Gruppi di Carnot

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 15–18.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_15_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Aprile 2010, 15-18

Approssimazioni di norme di Sobolev in Gruppi di Carnot

DAVIDE BARBIERI

1. – Introduzione

In questa tesi è stata generalizzata al setting dei gruppi di Carnot [1] una tecnica introdotta in ambiente Euclideo in [2] che permette di ottenere norme di Sobolev $W^{1,p}$ attraverso medie integrali localizzate di differenze finite, dunque senza fare uso esplicito della struttura differenziabile. Nel caso dei gruppi di Carnot, la struttura differenziabile intrinseca è data dai campi vettoriali che appartengono al primo strato dell'algebra: per ottenere norme di Sobolev equivalenti attraverso differenze finite è dunque stato necessario utilizzare opportuni strumenti di localizzazione che agissero in termini della distanza intrinseca, di Carnot-Carathéodory [1]. Come sviluppo di questo approccio approssimato, è stato esteso a gruppi di Carnot un risultato di tipo disuguaglianza di Poincaré, ottenuto per la prima volta in $\mathbb{R}^N$ da [5], utilizzando qui una tecnica di dimostrazione costruttiva che risulta nuova anche in ambito Euclideo, basata su disuguaglianze unidimensionali e su particolari coordinate esponenziali approssimate introdotte in [4]. Si è potuto ottenere in questo modo una classe di disuguaglianze che contiene in particolare disuguaglianze di Poincaré per norme di tipo Gagliardo, utilizzate per l'analisi su spazi di Sobolev di ordine frazionario. Queste ultime si sono inoltre rivelate operatori non locali appartenenti ad una famiglia studiata in [3] per le sue proprietà di self-improving, grazie alle quali si è potuto ottenere un risultato di immersione con esponente di Sobolev ottimale.

Con $\mathbb{G}$ si indicherà sempre un gruppo di Carnot, d_{cc} sarà la distanza di Carnot-Carathéodory e le palle relative a tale distanza saranno indicate con B_{cc}. La struttura subriemanniana [1] sarà indicata con $|.|_X$ ed il gradiente orizzontale con ∇_X, mentre con Q si indicherà la dimensione omogenea (dimensione di Hausdorff, si veda [1]) di $\mathbb{G}$. Eventuali costanti positive che dipendono solo dalle proprietà del gruppo o al più dall'esponente di sommabilità p saranno dette costanti geometriche.

2. – Norme approssimate

Per ottenere una norma di Sobolev nella forma desiderata si è fatto uso di una particolare classe di norme omogenee (si veda [1]), invarianti sotto rotazioni orizzontali, ovvero rotazioni che coinvolgono solo coordinate canoniche che fanno riferimento ai campi del primo strato. Una tale norma sarà indicata con $|.|_{\mathbb{G}}$ e con $B_{\mathbb{G}}$ si intenderanno le palle relative.

La localizzazione è stata effettuata attraverso l'uso di mollificatori radiali, secondo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1. – *Una famiglia di funzioni* $\{\rho_n\}_{n>0}$, $\rho_n : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, *si dice una famiglia di mollificatori radiali rispetto alla norma* $|.|_\mathbb{G}$ *se ciascuna* $\rho_n(x)$ *dipende solo da* $|x|_\mathbb{G}$ *e valgono le seguenti*

$$i) \int_\mathbb{G} \rho_n(x)dx = 1 \quad \forall\, n > 0\ ; \qquad ii) \int_{\mathbb{G}\setminus B_\mathbb{G}(0,\delta)} \rho_n(x)dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \forall\, \delta > 0$$

Il primo risultato ottenuto è descritto dal seguente teorema.

TEOREMA 1. – *Sia* $\{\rho_n\}_{n>0}$ *una famiglia di mollificatori radiali ed* f *una funzione in* $L^p(\mathbb{G})$, *dove* $1 < p < \infty$. *Se esiste una costante finita* $C > 0$ *tale che*

$$I_n = \int_\mathbb{G}\int_\mathbb{G} \frac{|f(y) - f(x)|^p}{|x^{-1}\cdot y|_\mathbb{G}^p} \rho_n(|x^{-1}\cdot y|_\mathbb{G})dxdy \leq C \quad \forall\, n > n_0$$

allora $f \in W^{1,p}_\mathbb{G}(\mathbb{G})$. *Esiste inoltre una costante geometrica* κ_p *tale che*

$$I_n \longrightarrow \kappa_p \int_\mathbb{G} |\nabla_X f(x)|_X^p dx \quad quando \quad n \to \infty\,.$$

3. – Disuguaglianza di Poincaré-Ponce

L'operatore non locale introdotto come approssimazione integrale della norma del gradiente può essere utilizzato per ottenere stime sulle oscillazioni delle funzioni L^p. Non essendo più necessaria l'ipotesi di invarianza per rotazioni, i risultati sono espressi per semplicità in termini della distanza di CC. Una ipotesi aggiuntiva risulta però necessaria per il risultato, ovvero che la dipendenza radiale dei mollificatori sia monotona decrescente. Il risultato principale è espresso dal seguente teorema, del quale si darà un accenno della dimostrazione.

TEOREMA 2. – *Per ogni* $1 \leq p < \infty$ *esiste una costante geometrica* C_p *tale che*

$$\int_{B_{cc}} dx|f(x) - f_B|^p \leq C_p\ R^p \int_{\mu B_{cc}} dx \int_{\mu B_{cc}} dy\ \frac{|f(y) - f(x)|^p}{d_{cc}(x,y)^{p+Q-1}} \frac{\varphi(d_{cc}(x,y))}{\int_0^{\beta R} \varphi(\tau)d\tau}$$

per ogni palla B_{cc} *di raggio* R, *ogni* f *in* $L^p_{loc}(\mathbb{G})$ *e ogni funzione monotona decrescente* $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *in* L^1_{loc}, *con* μ *e* β *costanti geometriche* > 1.

DIMOSTRAZIONE. – Osservando che

$$I = \int_{B_{cc}(x_0,R)} dx|f(x) - f_B|^p \leq C \fint_{B_{cc}(0,2R)} dz \int_{B_{cc}(x_0,R)} dy|f(y\cdot z) - f(y)|^p$$

ed usando un risultato di [4] che permette di raggiungere ogni punto $z \in B_{cc}(0,2R)$ in tempi limitati $t_j(z) < TR$ attraverso una composizione finita di curve integrali dei campi orizzontali $\gamma_j(t_j)$, si può ricondurre il problema a una collezione di stime unidimensionali, analoghe per ciascuna di tali curve.

Più precisamente si ha

$$
\begin{aligned}
I &\le C \sum_j \fint_{B_{cc}(0,2R)} dz \int_{B_{cc}(x_0,cR)} d\eta \big| f(\eta \cdot \gamma_j(t_j(z))) - f(\eta) \big|^p \\
&\le C \sum_j \int_{B_{cc}(x_0,3cR)} dx \int_{-1/2}^{1/2} dt \int_{-1/2}^{1/2} ds |f(x \cdot \gamma_j(TRt)) - f(x \cdot \gamma_j(TRs))|^p \\
&\le C\sigma \sum_j \int_{B_{cc}(x_0,3cR)} dx \int_{-1/2}^{1/2} dt \int_{-1/2}^{1/2} ds \frac{|f(x \cdot \gamma_j(TRt)) - f(x \cdot \gamma_j(TRs))|^p}{|t-s|^p} \frac{\varphi(\sigma|t-s|)}{\int_0^\sigma \varphi(\tau) d\tau}
\end{aligned}
$$

dove la stima unidimensionale nell'ultimo passaggio permette di scegliere la scala $\sigma \in \mathbb{R}^+$ più opportuna su cui utilizzare la localizzazione attraverso le funzioni φ, le quali rappresentano una versione unidimensionale dei mollificatori radiali. La prova è conclusa interpretando le variabili unidimensionali come variabili radiali e sfruttando le proprietà di omogeneità della misura di Haar su $\mathbb{G}$, che permettono formule di tipo coarea sulle palle della metrica. □

Il teorema precedente fornisce una stima di tipo Poincaré, come si vede dal seguente corollario che può essere ottenuto usando la struttura dei mollificatori.

Corollario 1. – *Sia $\{\rho_n\}$ una famiglia di mollificatori radiali monotoni decrescenti, e sia $1 \le p < \infty$. Per ogni palla B_{cc} di raggio R ed ogni costante $C > C_p$ esiste un n_0 tale che*

$$
\int_{B_{cc}} dx |f(x) - f_B| \le CR^p \int_{\mu B_{cc}} dx \int_{\mu B_{cc}} dy \, \frac{|f(x) - f(y)|^p}{d_{cc}(x,y)^p} \rho_n(d_{cc}(x,y))
$$

per ogni $n > n_0$ ed ogni f in $L^p_{loc}(\mathbb{G})$. La soglia n_0 è data dalla condizione:

$$
\int_0^{\beta R} \rho_n(\tau) \tau^{Q-1} d\tau > \frac{C_p}{C} \quad \forall \, n > n_0 \ .
$$

Questo corollario in particolare mette in luce come la soglia n_0, che rappresenta una soglia minima di localizzazione, dipende dalla dimensione delle palle sulle quali vengono valutate le oscillazioni della funzione in esame: per sentirsi l'effetto di localizzazione infatti la scala deve rimpicciolirsi al rimpicciolirsi delle palle. Questo aggiustamento fine è reso possibile dall'approccio descritto nella precedente dimostrazione, in cui risulta esplicito il ruolo della scala nella stima unidimensionale.

4. – Norme di tipo Gagliardo e self-improving

Scegliendo come funzione localizzante $\varphi(\tau) = \tau^{(1-s)p-1}$, si ottiene il seguente corollario in forma di disuguaglianza di Poincaré rispetto alla norma di Gagliardo.

COROLLARIO 2. – *Sia $1 \leq p < \infty$, allora*

$$\int_{B_{cc}} dx|f(x) - f_B|^p \leq C_p\ \beta^{(1-s)p}(1-s)p\ R^{sp} \int_{\mu B_{cc}} dx \int_{\mu B_{cc}} dy\ \frac{|f(y) - f(x)|^p}{d_{cc}(x,y)^{Q+sp}}$$

per ogni palla B_{cc} di raggio R, ogni f in $L^p_{loc}(\mathbb{G})$, ed ogni $s \in \left[1 - \frac{1}{p}\ ,1\right)$.

Seguendo [3], la disuguaglianza precedente può essere migliorata riducendo le palle a destra fino alla dimensione della palla sulla quale si desidera valutare le oscillazioni ed aumentando l'esponente a sinistra fino al valore ottimale:

COROLLARIO 3. – *Per ogni $1 \leq p < \infty$ esiste una costante geometrica C tale che*

$$\left(\fint_{B_{cc}} dx|f(x) - f_B|^p \right)^{1/p} \leq C(1-s)R^{Q+s} \fint_{B_{cc}} dx \fint_{B_{cc}} dy \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)^{Q+s}}$$

per ogni palla B_{cc} di raggio R, ogni $s \in (0,1)$, ogni $f \in L^1_{loc}(\mathbb{G})$ ed ogni $1 \leq p < p^*$, dove l'esponente critico risulta essere $p^* = \dfrac{Q}{Q-s}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BONFIGLIOLI, E. LANCONELLI and F. UGUZZONI, *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians*, *Springer*, 2007.

[2] J. BOURGAIN, H. BREZIS and P. MIRONESCU, *Another look at Sobolev Spaces*, Opt. Contr. Part. Diff. Eq. (J.L. Menaldi et al. eds), IOS Press (2001), 439-455.

[3] B. FRANCHI, C. PÉREZ and R. L. WHEEDEN *Self-Improving properties of John-Nirenberg and Poincaré inequalities on spaces of homogeneous type*, J. Funct. Anal., **153** (1998), 108-146,

[4] D. MORBIDELLI, *Fractional Sobolev norms and structure of Carnot-Carathùodory balls for Hörmander vector fields*, Studia Math., **139** (2000), 213-244.

[5] A. PONCE, *An estimate in the spirit of the Poincaré's inequality*, J. Eur. Math. Soc., **6** (2003), 1-15.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: barbier@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica
con sede presso l'Università di Bologna – Ciclo XX
in co-tutela con Universitè de Cergy Pontoise
Direttori della ricerca: Professor Bruno Franchi, Professor Thierry Coulhon