La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Riccardo Aragona

Semi-invarianti di quiver simmetrici

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 11–14.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_11_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Aprile 2010, 11-14

Semi-invarianti di quiver simmetrici

RICCARDO ARAGONA

Le rappresentazioni di quiver possono essere viste come una formalizzazione di alcuni problemi di algebra lineare. I quiver simmetrici sono stati introdotti da Derksen e Weyman in [2] con lo scopo di fornire una simile formalizzazione per lo studio dei gruppi classici.

In recenti articoli le rappresentazioni di quiver e i loro semi-invarianti sono stati usati per provare interessanti risultati collegati ai gruppi generali lineari.

Per esempio, Derksen e Weyman in [1] hanno provato la proprietà di saturazione per i coefficienti di Littlewood-Richardson $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$, i.e. se $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Z}^n$ sono tali che $c^{N\nu}_{N\lambda,N\mu} \neq 0$ per qualche $N \in \mathbb{N}$, allora $c^{\nu}_{\lambda,\mu} \neq 0$. Magyar, Weyman e Zelevinsky in [4] hanno classificato i prodotti di varietà di bandiera con un numero finito di orbite sotto l'azione diagonale di gruppi generali lineari. Le rappresentazioni dei quiver simmetrici potrebbero essere un mezzo per risolvere simili problemi per i gruppi classici.

Derksen e Weyman per giunta in [1] hanno provato che gli anelli dei semi-invarianti di quiver "classici" sono generati dai semi-invarianti di tipo c^V (introdotti da Schofield in [5]), dove V è una rappresentazione del quiver in questione. Nella mia tesi di Dottorato forniamo simili risultati per quiver simmetrici di tipo finito e di tipo tame.

Un quiver è un grafo orientato. Formalmente è una coppia $Q = (Q_0, Q_1)$ dove Q_0 è un insieme di vertici e Q_1 è un insieme di frecce. Per ogni freccia $a \in Q_1$, chiamiamo $ta \in Q_0$ la coda di a e $ha \in Q_0$ la testa di a. Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso e a caratteristica zero. Una rappresentazione V di Q è una famiglia di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione finita $\{V(x) | x \in Q_0\}$ e di mappe $\mathbb{K}$-lineari $\{V(a) : V(ta) \to V(ha) | a \in Q_1\}$. Il vettore dimensione di una rappresentazione V è una funzione $\underline{dim}(V) : Q_0 \to \mathbb{N}$ definita da $\underline{dim}(V)(x) = dim(V(x))$. Un morfismo $f : V \to W$ tra due rappresentazioni è una famiglia di mappe lineari $\{f(x) : V(x) \to W(x) | f(ha)V(a) = W(a)f(ta) \forall a \in Q_1\}_{x \in Q_0}$. Denotiamo lo spazio dei morfismi da V in W con $Hom_Q(V, W)$.

Definiamo infine, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^{Q_0}$, la forma bilineare non simmetrica

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{x \in Q_0} \alpha(x)\beta(x) - \sum_{a \in Q_1} \alpha(ta)\beta(ha),$$

su $\mathbb{Z}^{Q_0}$, detta forma di Eulero di Q.

DEFINIZIONE 1. – *Un quiver simmetrico è una coppia (Q, σ) dove Q è un quiver (detto quiver soggiacente di (Q, σ)) e σ è una involuzione su $Q_0 \sqcup Q_1$ tale che*

(i) $\sigma(Q_0) = Q_0$ *e* $\sigma(Q_1) = Q_1$,
(ii) $t\sigma(a) = \sigma(ha)$ *e* $h\sigma(a) = \sigma(ta)$ *per ogni* $a \in Q_1$,
(iii) $\sigma(a) = a$ *se* $a \in Q_1$ *e* $\sigma(ta) = ha$.

DEFINIZIONE 2. – *Una rappresentazione ortogonale (rispettivamente simplettica) di un quiver simmetrico (Q, σ) è una coppia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, dove V è una rappresentazione del quiver soggiacente Q con un prodotto scalare non degenere simmetrico (rispettivamente anti-simmetrico) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su $\bigoplus_{x \in Q_0} V(x)$ tale che*

(i) *la restrizione* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *a* $V(x) \times V(y)$ *è zero se* $y \neq \sigma(x)$,
(ii) $\langle V(a)(v), w\rangle + \langle v, V(\sigma(a))(w)\rangle = 0$ *per ogni* $v \in V(ta)$ *e ogni* $w \in V(t\sigma(a))$.

Definiamo $ORep(Q, \beta)$ e $SpRep(Q, \beta)$ rispettivamente come lo spazio delle rappresentazioni ortogonali di dimensione β e lo spazio delle rappresentazioni simplettiche di dimensione β di (Q, σ).

Siano Q_0^σ (rispettivamente Q_1^σ) l'insieme dei vertici (rispettivamente delle frecce) fissate da σ. Cos abbiamo le partizioni

$$Q_0 = Q_0^+ \sqcup Q_0^\sigma \sqcup Q_0^- \tag{1}$$

$$Q_1 = Q_1^+ \sqcup Q_1^\sigma \sqcup Q_1^- \tag{2}$$

tali che $Q_0^- = \sigma(Q_0^+)$ e $Q_1^- = \sigma(Q_1^+)$, che soddisfano

i) $\forall a \in Q_1^+$, o $\{ta, ha\} \subset Q_0^+$ oppure uno degli elementi in $\{ta, ha\}$ è in Q_0^+ mentre l'altro è in Q_0^σ;
ii) $\forall x \in Q_0^+$, se $a \in Q_1$ con $ta = x$ o $ha = x$, allora $a \in Q_1^+ \sqcup Q_1^\sigma$.

Definiamo il gruppo

$$SO(Q, a) = \prod_{x \in Q_0^+} SL(a(x)) \times \prod_{x \in Q_0^\sigma} SO(a(x)), \tag{3}$$

dove $SO(a(x))$ è il gruppo delle trasformazioni ortogonali speciali per la forma simmetrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ristretta a $V(x)$.

Assumendo che $a(x)$ è pari per ogni $x \in Q_0^\sigma$, definiamo il gruppo

$$SSp(Q, a) = \prod_{x \in Q_0^+} SL(a(x)) \times \prod_{x \in Q_0^\sigma} Sp(a(x)),$$

dove $Sp(a(x))$ è il gruppo delle trasformazioni isometriche per la forma anti-simmetrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ristretta a $V(x)$.

L'azione di questi gruppi è definita da

$$g \cdot V = \{g_{ha} V(a) g_{ta}^{-1}\}_{a \in Q_1^+ \cup Q_1^\sigma}$$

dove $g = (g_x)_{x \in Q_0} \in SO(Q, a)$ (rispettivamente $g \in SSp(Q, a)$) e $V \in ORep(Q, a)$ (rispettivamente in $SpRep(Q, a)$). In particolare possiamo supporre $g_{\sigma(x)} = (g_x^{-1})^t$ per ogni $x \in Q_0$.

Infine consideriamo l'anello dei semi-invarianti di $ORep(Q, \beta)$

$$(5) \quad OSI(Q,\beta) = \mathbb{K}[ORep(Q,\beta)]^{SO(Q,\beta)} = \{f \in \mathbb{K}[ORep(Q,\beta)] | g \cdot f = f \ \forall g \in SO(Q,\beta)\}$$

e l'anello dei semi-invarianti di $SpRep(Q, a)$

$$(6) \quad SpSI(Q,\beta) = \mathbb{K}[SpRep(Q,\beta)]^{SSp(Q,\beta)} = \{f \in \mathbb{K}[SpRep(Q,\beta)] | g \cdot f = f \ \forall g \in SSp(Q,\beta)\},$$

dove $\mathbb{K}[ORep(Q, \beta)]$ è l'anello delle funzioni polinomiali su $ORep(Q, \beta)$ e $\mathbb{K}[SpRep(Q, \beta)]$ è l'anello delle funzioni polinomiali su $SpRep(Q, \beta)$.

Sia (Q, σ) un quiver simmetrico e V una rappresentazione del quiver Q tale che $\langle \underline{dim}\, V, \beta \rangle = 0$, dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è la forma di Eulero di Q. Sia

$$(7) \qquad 0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d^V_{min}} P_0 \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

la risoluzione proiettiva minimale di V. Definiamo il semi-invariante $c^V := det(Hom_Q(d^V_{min}, \cdot))$ (vedi [5]).

Siano τ il funtore di traslazione di Auslander-Reiten e ∇ il funtore di dualità.

LEMMA 1. – *Sia (Q, σ) un quiver simmetrico di tipo finito e di tipo tame. Sia d^V_{min} la matrice della presentazione proiettiva minimale di una rappresentazione V di Q di dimensione a e sia β un vettore dimensione simmetrico tale che $\langle a, \beta \rangle = 0$. Allora*

(1) *$Hom_Q(d^V_{min}, \cdot)$ è anti-simmetrica su $SpRep(Q, \beta)$ se e solo se V soddisfa*
   (i) $\tau V = \nabla V$
   (ii) *la successione almost split* $0 \to \nabla V \to Z \to V \to 0$ *ha il termine centrale Z in $ORep(Q)$;*

(2) *$Hom_Q(d^V_{min}, \cdot)$ è antisimmetrica su $ORep(Q, \beta)$ se e solo se V soddisfa la proprietà*
   (i) $\tau V = \nabla V$
   (ii) *la successione almost split* $0 \to \nabla V \to Z \to V \to 0$ *ha il termine centrale Z in $SpRep(Q)$.*

Se V soddisfa le proprietà del lemma 1, possiamo dunque definire il semi-invariante $pf^V := pf(Hom_Q(d^V_{min}, \cdot)$.

I principali risultati della tesi sono

TEOREMA 1. – *Sia (Q, σ) un quiver simmetrico di tipo finito o di tipo tame tale che Q sia senza cicli orientati e sia β un vettore dimensione simmetrico. L'anello $SpSI(Q, \beta)$ è generato dai semi-invarianti*

(i) c^V se $V \in Rep(Q)$ è tale che $\langle \underline{dim}\, V, \beta \rangle = 0$,
(ii) pf^V se $V \in Rep(Q)$ è tale che $\langle \underline{dim}\, V, \beta \rangle = 0$, $\tau V = \nabla V$ e la successione almost split $0 \to \nabla V \to Z \to V \to 0$ abbia il termine centrale Z in $ORep(Q)$.

TEOREMA 2. – *Sia (Q, σ) un quiver simmetrico di tipo finito o di tipo tame tale che Q sia senza cicli orientati e sia β un vettore dimensione simmetrico. L'anello $OSI(Q, \beta)$ è generato dai semi-invarianti*

(i) c^V *se* $V \in Rep(Q)$ *è tale che* $\langle \underline{dim}\, V, \beta \rangle = 0$,
(ii) pf^V *se* $V \in Rep(Q)$ *è tale che* $\langle \underline{dim}\, V, \beta \rangle = 0$, $\tau V = \nabla V$ *e la successione almost split* $0 \to \nabla V \to Z \to V \to 0$ *abbia il termine centrale* Z *in* $SpRep(Q)$.

La strategia delle dimostrazioni è la seguente. Prima adattiamo la tecnica dei funtori di riflessione ai quiver simmetrici. Poi dimostriamo che possiamo ridurre i teoremi 1 e 2, mediante questa tecnica, a particolari orientazioni dei quiver simmetrici. Infine, proviamo i teoremi 1 e 2 per queste orientazioni.

Per i quiver simmetrici di tipo finito e tipo tame, nel caso in cui le rappresentazioni ortogonali e simplettiche siano regolari omogenee, diamo una dimostrazione dei teoremi 1 e 2 caso per caso, utilizzando la teoria degli invarianti classica ed i funtori di Schur. Per i quiver simmetrici di tipo tame, nel caso in cui le rappresentazioni ortogonali e simplettiche siano regolari non omogenee, prima descriviamo la decomposizione generica (vedi [3]) dei vettori dimensione di rappresentazioni ortogonali o simplettiche, poi, utilizzando questa, descriviamo caso per caso l'anello dei semi-invarianti.

BIBLIOGRAFIA

[1] DERKSEN H. e WEYMAN J., *Semi-invariants of quivers and saturation for Littlewood-Richardson coefficients*, J. Amer. Math. Soc., **16** (2000), 467-479.
[2] DERKSEN H. e WEYMAN J., *Generalized quivers associated to reductive groups*, Colloq. Math., **94** (2002), 151-173.
[3] KAC V. G., *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory*, Invent. Math., **56** (1980), 57-92.
[4] MAGYAR P., WEYMAN J. e ZELEVINSKY A., *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math., **141** (1999), 97-118.
[5] SCHOFIELD A., *Semi-invariants of quivers*, J. London Math. Soc., **65** (1992), 46-64.

Via Siro Corti 53, 00135 - Roma
e-mail: ric_aragona@yahoo.it
Dottorato in Matematica con sede presso l'Università di Roma "Tor Vergata" – Ciclo XXI
Direttore di ricerca: Prof. Elisabetta Strickland, Università di Roma "Tor Vergata"