
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ALBERTO FACCHINI, GABRIELE LOLLI

Insiemi e classi

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 2 (2009), n.3, p. 415–424.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_3_415_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_3_415_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Insiemi e classi

ALBERTO FACCHINI(*) - GABRIELE LOLLI

La nozione di insieme è vecchia quanto l'uomo. Da sempre l'uomo chiama "popoli" certi insiemi di persone e "greggi" certi insiemi di pecore. È solo nell'Ottocento però che il concetto di insieme entra prepotentemente in matematica, attraverso la logica del tempo, che concepiva gli insiemi come "estensioni di concetti". All'inizio del Novecento, con la scoperta delle prime antinomie, come quelle di Russell, del massimo ordinale o del massimo cardinale, noi matematici abbiamo in larga parte riconosciuto l'assoluta necessità di uniformarci alle teorie assiomatiche degli insiemi, le più popolari delle quali sono certamente ZFC e GB. Ma se guardiamo in soldoni cosa significa questo, vediamo che si tratta semplicemente di escludere alcuni oggetti, non conferendo più loro il sacro nome di insiemi. Eventualmente, si possono ancora considerare, ma chiamandoli classi, o classi proprie.

Vediamo un po'. "Non soddisfi i miei assiomi perché sei troppo grande per chiamarti insieme e non ti posso nemmeno affibbiare una cardinalità? Bene, ti chiamo classe." Oppure: "Mi crei dei problemi perché appartieni a te stesso? Nemmeno te ti chiamo insieme, ti chiamo iperinsieme, e addirittura ti escludo con l'assioma di fondazione." Insomma, il modo in cui è stato risolto il problema è stato quello degli struzzi: mettendo la testa nella sabbia e non vedendo così più il problema. Infatti il modo in cui è stata risolta la difficoltà è stato essenzialmente il seguente. "Se sei un insieme e crei delle difficoltà nella

(*) Con il supporto finanziario del Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (Prin 2007 "Anelli, algebre, moduli e categorie") e dell'Università di Padova (Progetto di Ricerca di Ateneo CPDA071244/07). Il primo autore ringrazia i numerosi colleghi — logici, topologi, algebristi, ... — del Dipartimento di Matematica Pura e Applicata con cui ha discusso i temi trattati in questa nota nell'ultimo biennio. In particolare, è infinitamente grato ad Alberto Zanardo.

teoria degli insiemi, bene, risolvo il problema non chiamandoti più insieme. Ti chiamo classe et *voilà*, il problema non c'è più." Non chiamo più "insiemi" gli insiemi che mi possono creare problemi, quindi non li considero più, non li vedo più, ed ecco che non si vede più il problema⁽¹⁾.

Può far sorridere, ma questa è proprio la scelta che fa da alcuni decenni la maggior parte dei matematici, o, meglio, che è stata introdotta fare. Ma procedendo con la storia della matematica del ventesimo secolo, ci si rende conto che a volte fare la matematica usando solo gli insiemi è molto difficile, forse impossibile: la classi servono ancora, eccome. Diamo un esempio considerando come si introducono le categorie. La definizione che si dà usualmente comincia con "Una categoria C consiste di una classe, detta la classe degli oggetti di C , e, per ogni coppia di oggetti di C di un insieme ...". Non ci si può proprio limitare a considerare solo le cosiddette categorie piccole, quelle in cui la classe degli oggetti è un insieme. Potremmo lavorare, ad esempio, senza la categoria **Set** di tutti gli insiemi? Oggidì letteralmente impossibile. Coloro che hanno assiomatizzato la teoria degli insiemi non se ne sono preoccupati, perché hanno notato giustamente che ogni classe di cui si deve parlare è definita da una formula, e può essere sostituita da quella⁽²⁾; ma la matematica non si fa solo lavorando sulle formule, occorre trasformarle in oggetti. D'altra parte pare che neanche i logici possano lavorare senza la classe, indicata con V , di tutti gli insiemi, che corrisponde alla classe degli oggetti di **Set**; loro sanno che di modelli, addirittura numerabili, ce ne sono

⁽¹⁾ Questa posizione risale a Cantor, che in una lettera a Hilbert del 1897 spiega come evitare le antinomie del massimo cardinale e del massimo ordinale, che aveva trovato nel 1895: "Una moltitudine [*Vielheit*] può essere costituita in modo tale che l'assunzione che *tutti* i suoi elementi 'siano insieme' porti a una contraddizione, e quindi sia impossibile concepire tale moltitudine come una unità, come 'una cosa compiuta'. Tali moltitudini le chiamo *assolutamente infinite*, o *inconsistenti* [*inkonsistente*]" Cantor tuttavia intendeva escluderle in modo drastico, senza dare loro una collocazione matematica di riserva né una denominazione positiva.

⁽²⁾ È la soluzione di Zermelo, passata in ZFC, ma anche in GB, dove le classi corrispondono a formule predicative, cioè che non presuppongono un dominio di classi sul quale far variare i quantificatori, e che abbiano quindi un'esistenza oggettiva.

millanta, e pure nei loro argomenti parlano dell'universo intero; dicono che pensano a un modello generico, ma non è vero: tant'è che si dividono su come deve essere fatto V quando considerano gli assiomi da aggiungere per completare la teoria⁽³⁾. E così le classi sono tornate, si continua a usarle ma un po' sottobanco, vengono trattate sempre con riguardo e delicatezza, facendoci solo operazioni facili facili, l'unione di due classi o poco più, per il rischio di incappare nelle famigerate antinomie.

Ottimi matematici si rendono subito conto di quanto la situazione sia grottesca. Si cercano così delle vie di fuga dall'*impasse*. Una di queste, entrata in voga negli anni cinquanta e ancora usata da qualcuno, ma ormai pochissimi, è quella di introdurre gli "universi". Piaceva soprattutto ai geometri algebrici. L'idea è quella di lavorare sempre dentro un insieme, che chiamiamo universo, e che sarà grande perché ci mettiamo tutto quello che ci serve, ma non troppo in modo da poterlo ancora chiamare insieme. La definizione formale è questa (per una bella e chiara trattazione rimandiamo a [2, § 6.4]):

Un *universo* è un insieme U soddisfacente le seguenti proprietà:

- (a) $X \in Y \in U \Rightarrow X \in U$.
- (b) $X, Y \in U \Rightarrow \{X, Y\} \in U$.
- (c) $X, Y \in U \Rightarrow X \times Y \in U$.
- (d) $X \in U \Rightarrow \mathcal{P}(X) \in U$.
- (e) $X \in U \Rightarrow \bigcup_{Y \in X} Y \in U$.
- (f) $\omega \in U$.
- (g) Se $X \in U$ e $f: X \rightarrow U$ è un'applicazione, allora $\{f(Y) \mid Y \in X\} \in U$.

È molto importante osservare però che gli assiomi di ZFC non garantiscono l'esistenza di un universo (non possono, perché U risulterebbe un modello di ZFC, contro Gödel e l'impossibilità di dimostrare internamente la non contraddittorietà). Quindi per sopravvivere dobbiamo introdurre un ulteriore assioma da aggiungere agli assiomi di ZFC (e qui seguiamo Grothendieck):

⁽³⁾ Questa dialettica, psicologia prima che logica, è discussa approfonditamente in [1].

Assioma degli universi: Ogni insieme appartiene ad un universo.

Dato un qualunque universo U , gli elementi di U con la relazione $\in$ tra di essi soddisfa gli assiomi di ZFC. Quindi possiamo fare le nostre operazioni e argomentazioni matematiche restando dentro un universo U che supponiamo fissato. Nell'universo troviamo tutto quello che ci serve, e se non lo troviamo glielo possiamo sempre aggiungere grazie all'Assioma degli universi. Insomma, ci mettiamo dentro un insieme che eventualmente espandiamo. L'idea è interessante, ma ad alcuni matematici sembra ancora piuttosto insoddisfacente o quantomeno non così elegante come soluzione del problema. Come si fa a parlare della categoria **Set** nel nostro universo, in questo universo in espansione? Dobbiamo limitarci a considerare gli insiemi solo fino a una certa cardinalità fissata, che eventualmente aumentiamo se necessario? Insomma: anche l'idea dell'universo non è completamente adeguata, nel senso che non risolve completamente il problema di come trattare gli insiemi grandi, quelli che i matematici continuano a usare, magari negandolo, e chiamandoli classi. E poi non dimentichiamoci che, come dice Russell nell'*Introduzione alla filosofia matematica*, "Postulare ciò che desideriamo ha molti vantaggi: gli stessi del furto nei confronti del lavoro onesto." Intendiamoci, la proposta di Grothendieck sugli universi gode di tutto il nostro rispetto, è parte del bagaglio culturale del pensiero matematico, ma a tratti, per la teoria delle categorie almeno, sembra inadeguata.

Il secondo autore anni fa, quando l'idea degli universi era ancora fresca, dedicò all'argomento un seminario, poi trasformato in libretto [8], nel quale spiegava le conseguenze difficilmente immaginabili, senza una preparazione logica, di assumere l'esistenza di un insieme da chiamare universo in modo coerente con il nome e con le esigenze di lavoro. Non basta infatti chiedere alcune proprietà di chiusura, come quelle che definiscono gli universi U e assicurano che gli U sono V_k con k inaccessible⁽⁴⁾, perché l'universo deve essere quanto più uguale a V possibile per meritare questo nome, rifletterlo come uno specchio.

⁽⁴⁾ I V_α sono i livelli in cui è gerarchizzata la classe V , definiti ricorsivamente con l'operazione potenza: $V_0 = \emptyset$, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$, $V_\lambda = \bigcup_{\alpha \in \lambda} V_\alpha$ per λ limite, e V è l'unione di tutti i V_α .

Allora come minimo in esso devono essere veri gli stessi enunciati veri in V (vari gradi di questa richiesta, che si chiama in generale “riflessione”, sono possibili); quindi l’assunzione di un universo diventa autoreplicante: un universo U esistente in V deve contenere un universo esistente in U , e U non può essere il primo che soddisfa anche la riflessione. L’assioma di Grothendieck e della scuola francese chiedeva che esistessero inaccessibili arbitrariamente grandi, ma questo non è logicamente sufficiente affinché uno di questi soddisfi almeno il seguente principio di riflessione (R): Ogni formula con parametri in U soddisfatta in V è soddisfatta anche in U .

Per ottenere un U siffatto si hanno due alternative: se si pensa che gli universi debbano essere modelli della teoria degli insiemi del secondo ordine (quella cioè nella quale oltre a quantificatori su individui si usano quantificatori su insiemi⁽⁵⁾), l’assioma da aggiungere a ZFC è che la classe *Ord* degli ordinali abbia la proprietà di Mahlo (cioè che ogni funzione crescente e continua da *Ord* in *Ord* abbia un inaccessibile tra i suoi punti critici)⁽⁶⁾; se si ritiene sufficiente la teoria degli insiemi del primo ordine, la coerenza del principio di riflessione (R) è dimostrabile se si lavora nella metateoria M di Morse-Mostowski (o Morse-Mostowski-Kelley per essere stata presentata per la prima volta nell’appendice al libro [5] di Kelley), dove si dimostra che esistono sottostrutture elementari di V , cioè appunto insiemi che soddisfano (R).

La teoria M dà molta maggiore libertà nella trattazione delle classi, rispetto a quelle predicative come GB di Gödel-Bernays, perché non richiede controlli formali: una volta stabilito che il linguaggio contempla variabili per insiemi $x, y, \dots$ e per classi $X, Y, \dots$, qualunque formula del linguaggio può essere usata per definire classi. In fondo si tratta della vecchia teoria ingenua degli insiemi, fatta solo con un po’ di cautela. Le operazioni disponibili sulle classi sono tuttavia sempre quelle logiche, cioè quelle booleane, con in più l’unione e l’intersezione genera-

⁽⁵⁾ Questa è la terminologia logica generale; nel caso particolare del linguaggio insiemistico abbiamo: quantificatori su insiemi e quantificatori su classi.

⁽⁶⁾ Questo assioma è molto più forte della esistenza di inaccessibili arbitrariamente grandi; implica che esistono anche iperinaccessibili, cioè inaccessibili limite di inaccessibili, e altro.

lizzate a famiglie di classi indiciate dalla totalità di tutte le classi. Ma la teoria M è interessante perché dimostra molte più cose di ZFC sugli insiemi appartenenti alla classe V , anche inaspettati, come l'esistenza di un insieme che è sottostruttura elementare di V , nel senso di (R) . È il fenomeno generale, messo in luce ed enfatizzato da Gödel, che con concetti più astratti si ottengono maggiori risultati sui domini inferiori.

I non addetti ai lavori, cioè i non matematici, credono che la matematica sia un solido castello costruito sulla roccia, mentre noi sappiamo bene che altro che castello sulla roccia, camminiamo su un filo, su un filo sospeso nel vuoto, e, anzi, il filo su cui camminiamo dall'altra parte non è attaccato a nulla . . . o ci stiamo arrampicando su una fune che abbiamo lanciato noi stessi in aria . . . Gli insiemi (gli enti, le strutture matematiche) che sembrano essere più interessanti appaiono essere quelli che non esistono: V , i cardinali grandi, . . . Qui la situazione di precarietà viene nobilitata: è più interessante quello che è al limite della conoscenza e delle possibilità, quello di cui non ci si accontenta.

L'esplorazione logica può richiedere complicazioni non immediatamente traducibili in conclusioni spendibili, o sottigliezze che i matematici non sono tenuti a conoscere. I matematici contribuiscono ponendo le esigenze, i desiderata e i vincoli, e qualche volta le conclusioni che nascono dalla ricerca. Ma allo stato attuale (e anche senza considerare innumerevoli altri problemi, come l'irrisolta cardinalità della potenza $\mathcal{P}(X)$, o l'assioma di determinatezza), la teoria degli insiemi appare caotica a chi cerca garanzie. Quanto più sono sottili le analisi, tanto meno la teoria appare solida, ben delineata.

Ma torniamo alla teoria delle categorie. Spesso è indispensabile farvi uso non solo delle classi, ma anche dell'assioma delle scelte nelle classi, nel senso che risulta necessario fare una classe propria di scelte. Diamo due esempi.

(1) Nelle prime pagine di qualunque libro di teoria delle categorie si può trovare la definizione di equivalenza tra due categorie C e D . La definizione si può dare in due modi: "Un'equivalenza è un funtore pieno, fedele e denso", oppure "Un'equivalenza è un funtore $F: C \rightarrow D$ per il quale esiste un funtore $G: D \rightarrow C$ con il funtore GF naturalmente isomorfo al funtore identità di C ed il funtore FG naturalmente isomorfo al funtore identità di D ". Per dimostrare l'equivalenza di queste

due definizioni è indispensabile l'assioma della scelta per le classi, ma questo viene raramente evidenziato. Lo fa ad esempio onestamente Kelly in [6, p. 301], ma si tratta di una delle rare eccezioni. In genere i categoristi fanno uso dell'assioma della scelta nelle classi senza evidenziarne l'uso stesso.

(2) Ecco un secondo esempio. L'involuppo iniettivo non è un funtore $E: \text{Mod-}R \rightarrow \text{Mod-}R$, eccetto che nel caso di anelli R molto particolari, essenzialmente perché non è possibile fare in modo che $E(fg) = E(f)E(g)$ per morfismi arbitrari f e g [3]. Qui $E(f)$ denota l'estensione di un morfismo f di moduli al loro involuppo iniettivo. Ma in casi speciali, ossia ad esempio restringendosi a sottocategorie di $\text{Mod-}R$, E diventa un funtore. Ad esempio, se $\text{NS}(R)$ è la sottocategoria piena di $\text{Mod-}R$ i cui oggetti sono tutti gli R -moduli destri non-singolari, allora $E: \text{NS}(R) \rightarrow \text{Mod-}R$ è un funtore. Ma nel definirlo dobbiamo fissare per ogni R -modulo destro non-singolare un involuppo iniettivo, ossia dobbiamo fare una classe di scelte anche questa volta.

A questo punto diventa quindi indispensabile avere a disposizione non solo le classi, ma anche l'assioma della scelta per classi. Per una interessante trattazione rimandiamo a [11], che è diviso in due parti, una per le forme dell'assioma della scelta che si esprimono con gli insiemi, e l'altra per quelle che si esprimono con le classi. Assiomi di scelta per classi sono stati proposti e usati da von Neumann nel 1925, nella forma: Ogni classe propria può essere mappata sull'universo V (dimostrando nel 1928 che implica la buona ordinabilità dell'universo); da Gödel nel 1940 nella forma: Se S è una classe di insiemi non vuoti, esiste una funzione F tale che per ogni x in S $F(x) \in x$; da Bernyas nel 1941 nella forma che per ogni relazione (classe) esiste una funzione contenuta in essa che ha lo stesso dominio. Quella di Bernays è forse la più comoda, lavorando con le classi; in seguito ne sono state formulate innumerevoli varianti.

Se diamo per buono l'assioma della scelta per le classi, come chi lavora con le categorie a questo punto, diremmo, è costretto a fare, se ne ricava che l'assioma della scelta per le classi è equivalente al fatto che ogni insieme è bene ordinabile, e quindi che ogni classe propria è equipotente alla classe Ord degli ordinali. Insomma, tutte le classi proprie diventano equipotenti. In altre parole, c'è un massimo ordinale e un massimo cardinale (per le classi, e tutte le classi proprie hanno

questa cardinalità), e però questo massimo ordinale e questo massimo cardinale non sono ovviamente insiemi.

A dire il vero qui però c'è da essere un po' più precisi, perché ci sono delle classi che non sono insiemi non perché hanno una cardinalità troppo grande, ma per altri motivi, ad esempio perché i loro elementi non sono insiemi. Facciamo un altro esempio. Consideriamo il monoide delle classi di isomorfismo dei gruppi abeliani finiti. Più precisamente, denotiamo con $\langle G \rangle$, per ogni gruppo G , la classe di isomorfismo di G , ossia la classe di tutti i gruppi isomorfi a G . Sia adesso I la classe di tutte le classi $\langle G \rangle$ quando G varia nella classe di tutti i gruppi (additivi) abeliani finiti. Tra l'altro su I si può definire un'operazione di addizione $+$ indotta dalla somma diretta ponendo $\langle G \rangle + \langle H \rangle = \langle G \oplus H \rangle$ per ogni $\langle G \rangle, \langle H \rangle \in I$, e I con tale operazione diventa un monoide commutativo libero avente come insieme libero di generatori la classe di tutte le classi $\langle \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z} \rangle$, dove p varia tra i primi ed n tra gli interi positivi. Quindi I è numerabile. Però I non è un insieme, ma non per via della cardinalità, ossia perché troppo grande, ma perché nella teoria assiomatica degli insiemi gli elementi degli insiemi devono essere a loro volta insiemi. Più precisamente, I non è un insieme perché altrimenti verrebbe contraddetto l'assioma della somma di Zermelo (assioma dell'unione), che è l'assioma della teoria generale degli insiemi che dice che “per ogni insieme S esiste l'insieme i cui elementi sono gli elementi degli elementi di S ”. Questo è l'assioma che ci garantisce di ottenere ancora un insieme quando facciamo le unioni di insiemi. Ma al fatto che I non sia un insieme si rimedia facilmente, semplicemente prendendo in I un insieme di rappresentanti a meno di isomorfismo.

Altri esempi che sembrano richiedere classi di classi sono stati segnalati da MacLane [9], ad esempio la definizione di $\text{Ext}_R^1(C, A)$, dove A e C sono due oggetti della categoria dei moduli destri su un anello R fissato. Ma appunto in tutti questi casi si può fare appello in modo essenziale all'assioma di scelta, per sostituire le classi con loro rappresentanti, e una classe di classi con una classe di rappresentanti. L'assioma di scelta si può aggiungere a **GB** o a **M** nella forma di Bernays:

$$\text{Rel}(X) \rightarrow \exists Y (Fn(Y) \wedge Y \subseteq X \wedge \text{dom}(Y) = \text{dom}(X)),$$

(*Rel* è abbreviazione per “essere una relazione” e *Fn* per “essere una

funzione”) dove non è escluso che per ogni x nel $\text{dom}(X)$ $\{y : \langle x, y \rangle \in X\}$ sia una classe.

MacLane ha qualche riserva, ma sembra ingiustificata, perché l’assioma non è più forte di quello che si ottiene restringendolo a X tali che per ogni x nel $\text{dom}(X)$ $\{y : \langle x, y \rangle \in X\}$ è un insieme, quindi a quelle che chiameremmo classi di insiemi. Questo era già stato considerato da Hilbert nel suo sistema logico, dove esisteva un operatore σ di scelta ovunque definito, quindi con dominio una classe.

D’altra parte neanche in $\mathbf{M}$ è possibile salire ancora di livello considerando classi di classi, neanche $\{X, Y\}$, e non ci sono teorie che lo permettano, a parte quelle studiate *ad hoc* per ragioni metamatematiche, con n livelli, dove tuttavia si ripropongono tutti gli stessi problemi per queste superclassi⁽⁷⁾. Allora tanto varrebbe mettersi subito in una situazione dove ci sono infiniti livelli, o tipi di classi; come nella teoria dei tipi appunto, con la base data non da un dominio qualunque di individui ma addirittura da V ; ma poi perché non fare l’unione e continuare? Per ogni ordinale? Ma gli ordinali in quale teoria sono definiti? ... In questa prospettiva l’universo originale degli insiemi non ha più alcun significato, il che non sembra ragionevole; esso sarebbe solo un punto di partenza per la iterazione indefinita delle stesse operazioni, ma quale è l’intuizione che sorregge il tutto?

Intanto la teoria delle categorie si trova appesantita dalla continua necessaria distinzione tra insiemi e classi: in [4] sono assiomatizzati in partenza i morfismi “piccoli”, come quelle funzioni tra classi le cui fibre sono piccole; in [10] una presentazione assiomatica formalista contempla interpretazioni non precisate dette metacategorie, ma per riservare poi il nome di categorie a quelle che sono insiemi.

⁽⁷⁾ Al riguardo, una notazione curiosa riguarda la reazione di Kurt Gödel alla indicazione del concetto di categoria come esempio di qualcosa non rientrante nella prospettiva insiemistica, per l’auto-applicabilità rappresentata dalle categorie di categorie: “A me sembra che tutto si possa comprendere in una teoria degli insiemi con una nozione di classe iterata un numero finito di volte, con la riflessività che risulta automaticamente attraverso una ‘ambiguità di tipo’ delle sue affermazioni” (Lettera a Paul Bernays del 9 gennaio 1963, in [7, p. 221]). Intendeva probabilmente che nel discorso classi di classi e simili sarebbero considerate classi, ma la proposta di una ambiguità espositiva sistematica, peraltro non ulteriormente precisata, sembra troppo sofisticata.

In definitiva si ha l'impressione che la riduzione del concetto di struttura a quello di insieme abbia portato a complicazioni non rimediabili, un po' come la volontà di ridurre le traiettorie degli astri al cerchio, con cicli ed epicicli.

Con questo concludiamo. L'oggetto di questo scritto è limitato. Non è nostro obiettivo trovare una soluzione e indicare un sistema diverso omnicomprensivo, vogliamo solo denunciare una situazione. La politica dello struzzo ha il merito di non bloccare la ricerca, ignorando vincoli e divieti; ma forse sarebbe meglio alzare la testa, e che noi matematici prendessimo atto che il concetto di insieme, inizialmente una forza espansiva e liberatoria, si sta rivelando un impaccio immotivato per il pensiero: semplicemente non è vero che tutti gli oggetti matematici sono in V .

BIBLIOGRAFIA

- [1] ARRIGONI T., *What is meant by V* , Mentis, Paderborn, 2007.
- [2] BERGMAN G. M., *An Invitation to General Algebra and Universal Constructions*, Henry Helson, Berkeley, Ca, 1998. Disponibile anche in <http://math.berkeley.edu/~gbergman/245/>
- [3] FACCHINI A., *Injective modules, spectral categories, and applications*, in "Non-commutative rings, group rings, diagram algebras and their applications", Editori Jain S. K., Parvathi S., *Contemp. Math.* 456, Amer. Math. Soc. 2008, pp. 1-18.
- [4] JOYAL A. - MOERDIJK I., *Algebraic Set Theory*, Cambridge Univ. Press, *London Math. Soc. Lecture Notes Series* 200, Cambridge 1995.
- [5] KELLEY J. L., *General Topology*, D. Van Nostrand Company, Inc., Toronto-New York-London, 1955.
- [6] KELLY G. M., *On the radical of a category*, J. Australian Math. Soc. 4 (1964), 299-307.
- [7] GÖDEL K., *Collected Works*, vol. IV, Clarendon Press, Oxford, 2003.
- [8] LOLLI G., *Categorie, universi e principi di riflessione*, Boringhieri, Torino, 1977.
- [9] MACLANE S., *Locally small categories and the Foundations of set theory*, in "Infinistic Methods", Pergamon Press, Oxford, 1961.
- [10] MACLANE S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer, Berlin, 1^a ed. 1971.
- [11] RUBIN H. - RUBIN J., *Equivalents of the Axiom of Choice*, North-Holland, Amsterdam, 1963; 2^a edizione *Equivalents of the Axiom of Choice II*, Elsevier, Amsterdam, 1985.

Alberto Facchini, Dipartimento di Matematica Pura e Applicata,
Università di Padova
e-mail: facchini@math.unipd.it

Gabriele Lolli, Scuola Normale Superiore, Pisa
e-mail: gabriele.lolli@sns.it