Flavia Ventriglia

Teorema di rappresentazione e teoremi di convergenza per spazi di Vitali

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 307–309.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_307_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 307-309

Teorema di rappresentazione e teoremi di convergenza per spazi di Vitali

FLAVIA VENTRIGLIA

La tesi si inquadra nel seguente problema di Teoria della misura: estendere i teoremi di convergenza di Brooks-Jewett, Nikodym, ecc., a funzioni additive definite su strutture più generali di quelle Booleane. Seguendo alcuni recenti studi di K. D. Schmidt (1985, 1989), C. Constantinescu (1989), M. G. Graziano (1997, 2000) abbiamo rivolto la nostra attenzione a funzioni definite su spazi di Vitali.

Ricordiamo che uno spazio di Vitali, o clan minimale commutativo, è una struttura che accomuna e gli anelli Booleani e i gruppo reticolo ordinati (ℓ-gruppi). Il problema della loro determinazione fu posto da Birkoff agli inizi degli anni 60 e risolto da K. D. Schmidt e C. Constantinescu (cfr. [1]).

Uno spazio di Vitali $(E, \leq, +, 0)$ è un semigruppo parziale commutativo, nel senso che l'addizione è definita in un sottoinsieme di $E \times E$, tale che $(E, \leq\ )$ è un reticolo parzialmente ordinato, che si prova essere distributivo. Possiamo inoltre definire un'operazione di differenza parziale in questo modo: se x, y sono due elementi sommabili dello spazio di Vitali tali che $x + y = z$ allora possiamo definire la differenza $z - y = x$.

È evidente allora che un ℓ-gruppo abeliano $(G, \leq, +, 0)$ è uno spazio di Vitali in cui l'operazione di addizione è totale; invece se consideriamo un anello Booleano $\mathcal{A}$ e definiamo, per ogni coppia di elementi disgiunti, la loro somma uguale alla loro unione, si ha che $(\mathcal{A}, \subseteq, +, \emptyset)$ è uno spazio di Vitali.

La tesi è quindi divisa in modo naturale in due parti: uno studio delle strutture e la dimostrazione dei teoremi di convergenza.

Nella prima parte della tesi abbiamo ampliato lo studio degli spazi di Vitali prendendo in esame il caso di spazi di Vitali non necessariamente commutativi, noti anche come pseudo spazi di Vitali o clan minimali. Abbiamo così provato il seguente teorema di rappresentazione (cfr. [3, TH. 6.1])

TEOREMA 1. – *Sia E uno pseudo spazio di Vitali. Allora esiste un ℓ-gruppo G, detto gruppo rappresentativo, ed un omomorfismo iniettivo di spazi di Vitali, $\overline{\phi}$, di E in G. Inoltre G può essere scelto tale che $\overline{\phi}(E^+)$ genera G.*

E è commutativo, quindi è uno spazio di Vitali, se e solo se G è commutativo.

Il teorema di rappresentazione permette di studiare le relazioni esistenti tra le proprietà e le sottostrutture del gruppo rappresentativo e quelle dello pseudo spazio di Vitali. In particolare

(a) ogni pseudo spazio di Vitali σ-Dedekind completo, cioé tale che ogni successione di suoi elementi $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ limitata superiormente è tale che $\bigvee_{n=1}^{\infty} a_n$ esiste in E, è uno spazio di Vitali;

(b) esiste una corrispondenza biunivoca tra gli ideali del pseudo spazio di Vitali e gli ℓ-sottogruppi convessi del gruppo rappresentativo;

(c) Teorema di Loomis-Sikorski : Sia (E, u) uno spazio di Vitali σ-Dedekind completo con strong unit u (un elemento positivo u del pseudo di Vitali è detto uno strong unit se per ogni suo elemento x esiste un intero $n \geq 1$ tale che $|x| \leq nu = u_1 + \cdots + u_n$ dove $u_1 = \ldots = u_n = u$). Allora esiste uno spazio di Vitali $\mathcal{V}$ di funzioni numeriche limitate definite in uno spazio compatto di Hausdorff Ω e un σ-omomorfismo suriettivo (di spazi di Vitali) h di $\mathcal{V}$ in E tale che $h(1) = u$.

Nella seconda parte si considerano funzioni finitamente additive definite in uno spazio di Vitali E a valori in un gruppo topologico commutativo di Hausdorff G, dove una funzione μ di E in G è finitamente additiva se risulta

$$\mu(x+y) = \mu(x) + \mu(y) \tag{1}$$

per ogni coppia x, y di elementi di E tali $x + y$ esiste. Una funzione finitamente additiva u di E in G è localmente esaustiva se per ogni $(x_n)_{n\in\mathrm{N}}$ successione di elementi di E^+ finitamente sommabili con la successione delle somme parziali limitata (detta Σ-successione) risulta

$$\lim_n \mu(x_n) = 0. \tag{2}$$

In questo ambito vengono stabiliti i classici teoremi di convergenza di Nikodym e Brooks-Jewett. Il metodo dimostrativo è diverso da quello usato da Constantinescu in [1] in quanto si basa sulla dimostrazione preventiva, per funzioni definite in spazi di Vitali, di un classico teorema di Cafiero. Poiché questo risultato non sussiste per algebre di Boole senza aggiungere ulteriori ipotesi, si è introdotta, in analogia a quanto fatto da altri autori, la nozione di spazio di Vitali con la Subsequential Interpolation Property (SIP). Il criterio trovato è quindi il seguente

TEOREMA 2 (Cafiero). – *Siano E uno spazio di Vitali con la SIP,* $(\mu_i)_{i\in\mathrm{N}}$ *una successione di funzioni additive ed localmente esaustive di E nel gruppo topologico commutatativo d'Hausdorff G. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

[(i)] $(\mu_i)_{i\in\mathrm{N}}$ *è uniformemente localmente esaustiva;*

[(ii)] *per ogni U intorno dello zero di G e per ogni* Σ*-successione* $(e_j)_{j\in\mathrm{N}}$ *di elementi di E, esistono* i_0 *e* j_0 *numeri naturali tali che* $\mu_i(e_{j_0}) \in U$ *per ogni* $i \geq i_0$.

Da questo seguono i teoremi

TEOREMA 3 (Brooks-Jewett). – *Siano E uno spazio di Vitali con la SIP e* $(\mu_i)_{i\in\mathrm{N}}$ *una successione di funzioni additive e localmente esaustive di E nel gruppo topologico commutatativo d'Hausdorff G. Se* $(\mu_i)_{i\in\mathrm{N}}$ *è puntualmente convergente in E, allora* $(\mu_i)_{i\in\mathrm{N}}$ *è uniformemente localmente esaustiva.*

TEOREMA 4 (di convergenza di Nikodym). – *Siano E uno spazio di Vitali con la SIP,* $(\mu_i)_{i\in\mathrm{N}}$ *una successione di funzioni* σ*-additive di E nel gruppo topologico commutativo d'Hausdorff G, puntualmente convergente alla funzione* μ*. Allora si ha:*

[(i)] $(\mu_i)_{i\in\mathrm{N}}$ *è uniformemente* σ*-additiva.*
[(ii)] μ *è* σ*-additiva.*

Analoghi risultati si ottengono per lo studio di famiglie di funzioni asintoticamente esaustive.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. CONSTANTINESCU, *Some Properties of Spaces of Measures*, Suppl. Atti del Sem. Mat. Fis. Univ. di Modena, **XXXV**.
[2] P. DE LUCIA - T. TRAYNOR, *Non commutative group valued measures on a orthomodular poset*, Math Japonica, **40**, n. 2 (1994), 309-315.
[3] A. DVUREČENSKIJ, F. VENTRIGLIA, *On two versions of the Loomis-Sikorski Theorem for algebraic structures*, Soft Computing, **12** (2008), 1027-1034.
[4] F. VENTRIGLIA, *Cafiero and Brooks-Jewett Theorem for Vitali Spaces*, Ricerche di Mat., **56** (2007), 209-216.
[5] F. VENTRIGLIA, *Asymptotically exaustive functions in Vitali spaces*, Rend. Circ. Mat. di Palermo, **57** (2008), 203-212.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli",
Università di Napoli "Federico II"
e-mail: flavia.ventriglia@dma.unina.it
Dottorato in Scienze Matematiche
con sede presso l'Università di Napoli "Federico II"– Ciclo XIX
Direttore di Ricerca: Prof. P. de Lucia, Università di Napoli "Federico II"