La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Andrea Tommasoli

Principio del massimo, operatori di media e quasi limitatezza in contesti non euclidei

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 295–297.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_295_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 295-297

Principio del massimo, operatori di media e quasi limitatezza in contesti non euclidei

Andrea Tommasoli

La tesi di dottorato è suddivisa in tre parti, in ciascuna delle quali viene studiata una particolare e diversa classe di operatori differenziali alle derivate parziali, lineari del secondo ordine, con forma caratteristica semi-definita positiva.

1. – Principio del massimo, disuguaglianza di Harnack non omogenea e teorema di Liouville per operatori X-ellittici

In questa prima parte vengono studiati operatori in forma di divergenza, con coefficienti non regolari, mediante tecniche di Analisi in spazi metrici di natura omogenea di tipo Carnot-Carathéodory. Gli operatori sono del secondo ordine della forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(b_{ij}\partial_j u + d_i u) + \sum_{i=1}^{N} b_i \partial_i u + cu, \tag{1}$$

e sono di tipo X-ellittico, secondo la terminologia introdotta da A. E. Kogoj ed E. Lanconelli in [5]. Si ha in definitiva che la loro forma caratteristica è una forma quadratica equivalente a quella costruita con somme di quadrati di campi vettoriali lipschitziani, e la cui metrica di Carnot-Carathéodory è richiesto che verifichi la cosiddetta proprietà di duplicazione rispetto alla misura di Lebesgue. Per questo tipo di operatori vengono costruiti degli opportuni spazi di Sobolev, nei quali è possibile costruire una teoria analoga alla classica. Tutto ciò, unitamente ad un teorema di immersione e a una condizione di positività sui termini di ordine inferiore, consente di dimostrare il *principio del massimo* per le soluzioni deboli di $Lu = f$.
Si ottiene in definitiva

$$\sup_{\Omega} u^+ \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\|f\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2}$$

dove Ω è un insieme limitato aperto, f una funzione appartenente a $L^p(\Omega)$, u è una soluzione debole di $Lu = f$, u^+ la sua parte positiva e C è una costante indipendente da u ed f.

La tecnica utilizzata nella dimostrazione è quella delle funzioni test di Trudinger, adattata al nuovo contesto sub-riemanniano.

Se si aggiunge alle ipotesi una disuguaglianza di tipo Poincaré si riesce a dimostrare la *disuguaglianza di Harnack* invariante sui dischi della metrica intrinseca, valida per soluzioni non negative di $Lu = 0$:

$$\sup_{B_r} u \leq C \inf_{B_r} u. \tag{3}$$

B_r rappresenta la palla della metrica indotta dall'operatore, per la quale r deve essere sufficientemente piccolo affinché $B_{4r} \subseteq \Omega$. Si noti che C risulta essere costante strutturale indipendente da u.
La tecnica adottata per la dimostrazione è iterativa di tipo Moser.
La prima parte infine vengono illustrate una serie di applicazioni di questi risultati ai campi omogenei di vettori.

2. – Una nozione di convessità connessa agli operatori di media delle sottosoluzioni di equazioni ultraparaboliche su gruppi di Lie

Nella seconda parte si prendono in esame operatori introdotti da A.E. Kogoj ed E. Lanconelli in [6]. Si tratta di operatori che rientrano nella generale classe di operatori di Hörmander, che si presentano nella forma "somma di quadrati" con un termine di "drift", e ai quali soggiace una struttura di gruppo di Lie omogeneo. Per questi operatori C. Cinti [2] e C. Cinti e E. Lanconelli [3] hanno sviluppato una teoria del potenziale nella quale un ruolo decisivo viene giocato da formule di media integrale per le soluzioni. Queste formule di media generalizzano quelle classiche di Gauss per le funzioni armoniche e quelle di Pini, Fulks e Watson per quelle caloriche. Tramite queste formule si riescono a dedurre alcune *proprietà di convessità* rispetto un'opportuna funzione potenza del raggio.

Ricordiamo se ψ è una funzione strettamente monotona si dice che *φ è convessa rispetto a ψ* in un intervallo I se

$$\varphi(s) \leq \frac{\psi(s_2) - \psi(s)}{\psi(s_2) - \psi(s_1)} \varphi(s_1) + \frac{\psi(s) - \psi(s_1)}{\psi(s_2) - \psi(s_1)} \varphi(s_2), \quad \forall s \in I. \tag{4}$$

Il teorema principale dunque afferma che

1. $\forall z \in \Omega,\ 0 < r_1 < r_2 \ :\ \overline{\mathcal{A}}(z, r_1, r_2) \subseteq \Omega,$

   $$r \mapsto \mathcal{M}_r(u)(z) \text{ e una funzione convessa risp. a } r^{2-Q} \text{ su }]r_1, r_2[;$$

2. $\forall z \in \Omega,\ 0 < r_1 < r_2 \ :\ \overline{\mathcal{A}}(z, r_1, r_2) \subseteq \Omega,$

   $$r \mapsto r^Q M_r(u)(z) \text{ e una funzione convessa risp. a } r^{Q-2} \text{ su }]r_1, r_2[;$$

dove $\mathcal{M}$ ed M sono gli operatori di media di superficie e di volume, u è una funzione subarmonica, r è il raggio della palla su cui si fanno le medie, Ω un aperto, r_1 ed r_2 raggi opportuni affinché l'anello chiuso $\overline{\mathcal{A}}$ sia incluso nell'aperto considerato.

3. – Quasi limitatezza e regolarità per il problema di Dirichlet

Quest'ultima parte verte sul problema della regolarità dei punti di frontiera per il problema di Dirichlet relativo ad un qualunque sub-laplaciano su un gruppo di Lie stratificato. A questo contesto è stato esteso un criterio di Kuran [7] relativo al laplaciano classico. Tale criterio afferma che *un punto di frontiera è regolare se e solo se la soluzione fondamentale dell'operatore con polo nel punto in esame è quasi limitata* relativamente all'aperto sul quale si considera il problema al contorno.

Si ricorda che una funzione non negativa $\mathcal{L}$-armonica h in Ω ($\mathcal{L}$ è il sublaplaciano) è detta *quasi limitata* in Ω se esiste una successione crescente $(h_n)_{n\in N}$ di funzioni $\mathcal{L}$-armoniche non negative limitate in Ω tali che

$$h = \lim_{n\to+\infty} h_n \quad \text{in } \Omega. \tag{5}$$

Formalmente dunque siano $G = (R^n, \circ, \delta_\lambda)$ un gruppo di Lie stratificato e Γ_x la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ con polo x. Se $\Omega \subseteq G$ è un insieme aperto limitato e $x \in \partial\Omega$ allora

$$x \text{ e } \mathcal{L}\text{-regolare} \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_x \text{ e quasi limitata su } \Omega.$$

La dimostrazione è radicalmente diversa dal caso classico e generalizza anche la precedente fornita da Kuran.
In chiusura all'ultimo capitolo viene applicato questo criterio di regolarità in alcuni gruppi di Lie stratificati conosciuti.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli e F. Uguzzoni, *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians* (Springer, 2007).

[2] C. Cinti, *Sub-solutions and mean-value operators for ultraparabolic equations on Lie groups*, Mathematica Scandinavica, **101** (2007), 83-103.

[3] C. Cinti e E. Lanconelli, *Riesz and Poisson-Jensen representation formulas for a class of ultraparabolic operators on Lie groups*, Pot. Analysis, **30** (2009), 179-200.

[4] C. E. Gutiérrez and E. Lanconelli, *Maximum Principle, nonhomogeneous Harnack inequality, and Liouville theorems for X-elliptic operators*, Comm. in Partial Diff. Eq., **28** (2003), 11,12:1833-1862.

[5] A. E. Kogoj and E. Lanconelli, *X-elliptic operators and X-control distances*, Ricerche Mat., **49**, Special issue in memory of E. De Giorgi (2000), 223-243.

[6] A. E. Kogoj and E. Lanconelli, *An invariant Harnack inequality for a class of hypoelliptic ultraparabolic equations*, Mediterranean Journal of Mathematics, **1** (2004), 51-80.

[7] Ü. Kuran, *A new criterion of Dirichlet Regularity via the Quasi-Boundedness of the fundamental Superharmonic Function*, J. London Math. Soc., **19** (1979), 301-311.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: tommasoli@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica
con sede presso l'Università di Bologna – Ciclo XX
Direttore di ricerca: Prof. Ermanno Lanconelli, Università di Bologna