La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Guillermo Gonzalo Quelali

Equazioni differenziali non lineari di ordine frazionario

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 279–282.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_279_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 279-282

Equazioni differenziali non lineari di ordine frazionario

GUILLERMO GONZALO QUELALI

La tesi ha come obiettivo generale lo studio teorico delle equazioni differenziali di ordine frazionario. L'argomento del calcolo frazionario si è fortemente sviluppato durante le ultime decadi, infatti sono stati pubblicati recentemente una serie di libri e articoli su questo argomento (vedi ad esempio Podlubny [4], Miller e Ross [3]). La maggior parte di questi testi sono rivolte alla risoluzione delle equazioni differenziali di ordine frazionario con metodi dell'analisi numerica o con i metodi dell'analisi funzionale.

Si sottolinea che il carattere non locale degli operatori frazionari è una caratteristica principale per le applicazioni. I modelli frazionari sono relazionati con un gran numero di processi della dinamica complessa corrispondente a problemi nell'ambito di diversi campi, dalla biologia all' elettromagnetismo. Gli specialisti di questi campi applicati, fino a pochi anni fa, hanno privilegiato strumenti matematici di base tipo i metodi stocastici o i modelli non lineari, mentre in questi ultimi anni il calcolo frazionario, data la sua natura non locale, si è dimostrato come uno strumento complementare di grande utilità. Nella tesi non abbiamo considerato le applicazioni del calcolo frazionario.

Il modo più semplice per accedere all'idea del differenziale non-intero e degli operatori integrali, studiati nel campo del calcolo frazionario, è dato tramite la rappresentazione ben nota di Cauchy dell' integrale n-simo come convoluzione dell'integrale

$$\begin{aligned} I^n f(x) &= \int_0^x \int_0^{x_{n-1}} \cdots \int_0^{x_1} f(x_0)dx_0 \ldots dx_{n-2}dx_{n-1} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-n}} f(t)dt, \end{aligned}$$

dove $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$ e I^n è l' n-simo operatore integrale con $I^0 f(x) = f(x)$. Sostituendo il fattoriale discreto $(n-1)!$ con la funzione continua di Eulero, la funzione gamma, $\Gamma(n)$, che soddisfa la condizione $(n-1)! = \Gamma(n)$ per $n \in \mathbb{N}$,

DEFINIZIONE 1. – *La primitiva frazionaria di ordine* $s > 0$ *di una funzione continua* $f : \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\} \to \mathbb{R}$ *è data da*

$$I^s f(x) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-s}} f(t)dt, \qquad s, x \in \mathbb{R}_+.$$

il secondo membro è ben definito puntualmente su $\mathbb{R}^+$.

Gli aspetti più importanti del calcolo frazionario provengono dalle derivate di ordine non intero, che possiamo definire come segue

DEFINIZIONE 2. – *La derivata frazionaria di ordine* $0 < s < 1$ *di una funzione continua* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *è dato da*

$$D^s f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-s)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{1}{(x-t)^s} f(t)dt, \qquad 0 < s < 1, \; x \in \mathbb{R}_+.$$

il secondo membro è ben definito puntualmente su $\mathbb{R}^+$.

Questa è la definizione della derivata di ordine frazionario che abbiamo adottato nella dissertazione.

Recentemente molti articoli si sono occupati dello studio di esistenza e unicità della soluzione per le equazioni differenziali non lineari frazionarie (in breve N.F.D.E.). Diamo qui alcuni esempi principali.

In [2] Delbosco e Rodino hanno studiato l'esistenza di una soluzione per N.F.D.E. $D^s u = f(x, u)$, dove $0 < s < 1$, e $f : [0, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $0 < a < +\infty$ è una data funzione continua in $(0, a) \times \mathbb{R}$. Hanno ottenuto dei risultati applicando il teorema del punto fisso di Schauder e il principio delle contrazione di Banach.

Zhang in [5] ha studiato l'esistenza delle soluzioni positive per l'equazione differenziale frazionaria non lineare del tipo $D^s u = f(x, u)$, $u(0) = 0$, $0 < s < 1$, $0 < x < 1$.

Liang ha ottenuto l'esistenza usando un teorema del punto fisso di Krasnosel'skii-Zabreiko per l'equazione differenziale frazionaria non lineare

$$L(D)u(x) = h(x)f(u), \quad u(0) = 0, \; 0 < x < 1. \tag{1}$$

Babakhani e Daftardar-Gejji [1] hanno ricercato l'esistenza delle soluzioni positive nel caso dell'equazione differenziale frazionaria non lineare

$$L(D)u(x) = f(x, u), \quad u(0) = 0, \; 0 < x < 1,$$

dove $L(D) = D^{s_n} - a_{n-1}D^{s_{n-1}} - \cdots - a_1 D^{s_1}$, $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n < 1$, $a_j > 0$ $(j = 1, 2, ..., n-1)$ and D^{s_j} è la derivata frazionaria standard di Riemann-Liouville.

Veniamo al contenuto della tesi. Nel capitolo 1 abbiamo esaminato i risultati dell'analisi funzionale, teoremi del punto fisso, di Schauder, il teorema della funzione implicita e applicato agli operatori integrali, strumenti usati nelle dimostrazione di esistenza e unicità della soluzione. Nel capitolo 2 sono stati richiamati le definizioni di base e le proprietà di base del calcolo frazionario. Nei capitoli successivi sono stati presentati i risultati, che interessano i problemi di autovalore non lineari. Ecco un risultato, discusso nel capitolo 3. Considerato il problema:

PROBLEMA 3. (A) – *Trovare una soluzione continua definita in* $[0, a]$ $u \neq 0$ *per il problema degli autovalori*

$$D^s u(x) = \lambda u^p(x) \tag{2}$$

con $0 < s < 1$, $0 < p < 1$.

Introdotta la definizione di soluzione

DEFINIZIONE 4. – *Una coppia* $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times C([0, a])$ *è soluzione dell'equazione* (2) *se*

$$u(x) = \lambda \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^x (x-t)^{s-1} u^p(t) dt$$

per ogni $x \in [0, a]$.

È stato dimostrato il seguente

TEOREMA 5. – *Si assuma* $\lambda_0 p < \dfrac{1}{\Gamma(1-s)}$. *Il Problema A ammette un ramo di soluzioni non nulle. Più precisamente possiamo trovare un intervallo* (λ_1, λ_2)

$$\lambda_1 < \lambda_0 = \frac{\Gamma\left(\dfrac{s+1-p}{1-p}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{ps+1-p}{1-p}\right)} < \lambda_2 \tag{3}$$

tale che per ogni $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ *esiste una soluzione non banale* $u = u(\lambda, x)$, $u \in C^0([0, a])$.

Nei capitoli successivi abbiamo abbiamo provato a generalizzare questo risultato, considerando due operatori nella stessa equazione, come nel problema degli autovalori.

PROBLEMA 6. – *Trovare una soluzione* (λ, μ, u), $u \neq 0$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\lambda \cdot \mu \neq 0$, *su* $[0, a]$ *per l'equazione*

$$D^s u(x) - \mu D^r x^{-a} u(x) = \lambda u^p(x), \qquad u(0) = 0, \tag{4}$$

con $0 < r < s < 1$, $0 < p < 1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. BABAKHANI e V. DAFTARDAR-GEJJI, *Existence of positive solutions for nonlinear fractional differential equations*, J. Math. Anal. Appl., **278** (2003), 434-442..

[2] DELBOSCO D. e RODINO L, *Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation.*, J. Math. Anal. Appl., **204**, no. 2 (1996), 609-625.

[3] MILLER K. S. e ROSS B., *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equation.*, Wiley (New York, 1993).

[4] PODLUBNY I., *Fractional differential equation.*, Mathematics in Science and Engineering, **198** (1999).

[5] ZHANG SHUQIN, *The existence of a positive solution for a nonlinear fractional differential equation.*, J. Math. Anal. Appl., **252**, no. 2 (2000), 804-812.

Dipartimento di Matematica, Università di Torino,
e-mail: guillermogonzalo.quelali@unito.it
Dottorato in Matematica
con sede presso l'Università di Torino - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Prof. Rodino Luigi, Università di Torino