La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Gioia Failla

Varietà di Hankel, sottovarietà di G(r; m)

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 243–246.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_243_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 243-246

Varietà di Hankel, sottovarietà di $\boldsymbol{G}(r, m)$

GIOIA FAILLA

Denotiamo con $G(r+1, m+1)$ l'insieme dei sottospazi di dimensione $r+1$ dello spazio vettoriale k^{m+1}, essendo k un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero. Se V è un $k-$spazio vettoriale di dimensione $m+1$, $V \cong k^{m+1}$, $\boldsymbol{G}(r, V)$ sarà la corrispondente grassmanniana degli $r-$piani di $\boldsymbol{P}(V)$, essendo $\boldsymbol{P}(V)$ il proiettivizzato di V.

Le grassmanniane possono essere definite in diversi contesti. Noi descriveremo la grassmanniana come una varietà dello spazio proiettivo, via l'immersione di Plücker. Un'inclusione di spazi vettoriali $W \hookrightarrow V$ induce un'inclusione delle grassmanniane $\boldsymbol{G}(r, W) \hookrightarrow \boldsymbol{G}(r, V)$. L' immagine di tale mappa è chiamata sottograssmanniana ed è una sottovarietà di $\boldsymbol{G}(r, V)$.

Nella presente tesi si lavora con un'interessante sottovarietà della grassmanniana $\boldsymbol{G}(r, V)$, che d'ora in avanti denoteremo con $\boldsymbol{G}(r, m)$, detta Varietà di Hankel e indicata con $H(r, m)$. Essa non è classicamente nota ed stata introdotta per la prima volta da S. Giuffrida e R. Maggioni in [3]. La varietà $H(r, m)$ è formata dai cosiddetti $r-$piani di Hankel di $\boldsymbol{P}^m$ ed è propria per ogni coppia di interi r, m tali che $r < m - 2$. Precisamente un sottospazio vettoriale W di k^{m+1} di dimensione $r+1$ è detto di Hankel se esiste una matrice di Hankel non nulla di $r+1$ righe appartenenti a W. Di conseguenza, un $r-$piano si definisce di Hankel se esso è il proiettivizzato $\boldsymbol{P}(W)$ di uno spazio vettoriale W di Hankel.

La definizione di matrice di Hankel proviene da differenti campi, in maniera incisiva dal campo degli operatori di Toeplitz. In particolare, se A è una matrice quadrata, la matrice a blocchi di Toeplitz può essere ottenuta, in teoria degli operatori, come la matrice associata, rispetto alla base standard, alla mappa $F : k_p[t] \to K_{p+m}[t]$, essendo $k_p[t]$ (rispettivamente $(k_{p+m}[t])^{m+1}$) lo spazio vettoriale delle polinomi in t di grado $\leq p$ (rispettivamente dei polinomi in t di grado $\leq p+m$), ed F la mappa moltiplicazione per il seguente polinomio F di grado m di $k[t]$, $F = A^0 + +A^1 t + \ldots + A^m t^m$, essendo A^i la $(i+1)-$esima riga di A, $i = 0, \ldots, m$. In geometria algebrica le matrici di Toeplitz e di Hankel appaiono nello studio di anelli determinantali ed ideali di minori. Anche recentemente risultati importanti in $\boldsymbol{P}^3$ coinvolgono matrici di Hankel (talvolta dette cataletticanti), che descrivono luoghi determinatali. Nel lavoro di D.Eisenbud, K. Hulek, S. Popescu del 2002([2], Proposizione 3.1), si prova il seguente risultato: La matrice hessiana di una rete di quadriche di $\boldsymbol{P}^3$ è cataletticante (rispetto ad un'opportuna base) se e soltanto se le quadriche della rete annullano le quadriche di una cubica gobba.

Data una matrice $A \in k^{(m+1),(n+1)}$, per ogni $p \geq 0$, indicheremo con $T_A^\rho(p) \in k^{(m+p+1),(n+1)(p+1)}$ una matrice di Toeplitz a blocchi (l'indice ρ indica che la matrice di Toeplitz è costruita a partire dalle righe di A). Il problema di descrivere il rango di $T_A^\rho(p)$ è stato affrontato in [3], dove è stata posta l'attenzione sul legame tra il rango della matrice A ed il rango di $T_A^\rho(p)$. In particolare Giuffrida e Maggioni sono riusciti a descrivere tale connessione in termini di matrici di Hankel.

Infatti hanno tradotto il problema nello studio dei corrispondenti $k-$spazi vettoriali R (delle relazioni di riga della matrice A) ed $R(p)$ (delle relazioni di riga della matrice $T_A^\rho(p)$). La connessione tra R ed $R(p)$ è chiarita grazie alle nozioni di matrice di Hankel e di troncamento:

DEFINIZIONE 1. – *Definiamo matrice di Hankel una matrice del seguente tipo:*

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \dots & \lambda_m \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_m & \lambda_{m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{p-1} & \lambda_p & \dots & \dots & \lambda_{m+p-1} \\ \lambda_p & \lambda_{p+1} & \dots & \lambda_{m+p-1} & \lambda_{m+p} \end{pmatrix} \in k^{p+1,m+1}$$

DEFINIZIONE 2. – *Sia* $\underline{\lambda} = (\lambda_0, ..., \lambda_i, ..., \lambda_{i+m}, ..., \lambda_{m+p}) \in R(p)$. *Per ogni* j, $0 \leq j \leq p$, *e per ogni* i, $0 \leq i \leq p - j$, *definiamo* $i-$*esimo* $(m + j)-$*troncamento di* $\underline{\lambda}$ *il vettore* $\underline{\lambda}_i = (\lambda_i, ..., \lambda_{i+m}, ..., \lambda_{i+m+j}) \in k^{m+j+1}$.

L'osservazione cruciale è che per per ogni j, $0 \leq j \leq p$, gli $(m + j)$-troncamenti di $\underline{\lambda}$ sono vettori di $R(j)$, che sono righe di una $(p + 1 - j) \times (m + j + 1)$ matrice di Hankel.

Il problema di studiare gli r-piani di Hankel è interessante sia intrinsecamente che nell'ambito delle sottovarietà notevoli della Grassmanniana degli r-piani di $\boldsymbol{P}^m$. In [3] si affronta lo studio in entrambe le direzioni. Gli r-piani di Hankel vengono studiati tramite la matrice $S_p(\pi_r) \in k^{rm,(r+1)^2}$ associata all'r-piano π_r costruita a partire dalla matrice $(B_h B_f)$, detta matrice "dei decapitati e degli azzoppati". Precisamente viene provato che il numero delle matrici di Hankel indipendenti contenute in π_r eguaglia il numero di soluzioni indipendenti del sistema lineare associato alla suddetta matrice. Come conseguenza, nel caso $p = r$, se $r \geq m - 2$, allora il sistema ha sempre soluzioni ed ogni r-piano è di Hankel. Pertanto ogni retta di $\boldsymbol{P}^3$, ogni 2-piano di $\boldsymbol{P}^4$ è di Hankel. Inoltre, indipendentemente dalla dimensione dello spazio proiettivo fissato, ogni s-piano secante o incidente la curva razionale normale standard X_m di $\boldsymbol{P}^m$ è di Hankel. Infatti, per ogni punto di $\boldsymbol{P}^m$ del tipo $(a, b)^m = (a^m, a^{m-1}b, \dots, b^m)$, appartenente ad X_m, è sempre possibile costruire una matrice di Hankel di rango 1. Un problema interessante è l'introduzione di nuovi invarianti algebrici di uno spazio vettoriale. Invarianti dello spazio vettoriale R possono essere costruiti a partire da numeri h_i e k_i, dove:

$-h_i$ indica il numero degli $i-$piani di Hankel indipendenti non banali, cioè sghembi con la curva razionale normale X_m, contenuti nello spazio lineare $\boldsymbol{P}(R)$

$-k_i$ indica la dimensione dello spazio degli $i-$piani di Hankel indipendenti contenuti nello spazio lineare $\boldsymbol{P}(R)$.

Sia h_i che k_i indicano il termine generale delle successioni non crescenti di $i-$piani di Hankel che si possono descrivere in $\boldsymbol{P}(R)$, dette $h-$successione e $k-$successione.

Un problema aperto, posto da Giuffrida e Maggioni in [3], era la determinazione di tutte le possibili $h-$successioni e $k-$successioni in un dato spazio lineare.

La prima parte della tesi è dedicata allo studio degli invarianti h_i e k_i. Il problema aperto è stato risolto completamente, ottenendo i seguenti risultati di caratterizzazione:

TEOREMA 1. – *Considerato uno spazio lineare $\Sigma \subseteq \boldsymbol{P}^m$ di dimensione r e sghembo con X_m, congiungente t piani di Hankel massimali in Σ (che possono avere anche dimensione coincidente), allora l'$h-$successione è determinata e coincide con la $k-$successione.*

Sia nel caso che i piani massimali abbiano tutti la stessa dimensione, come nel caso che i piani abbiano tutti dimensioni differenti, si ottengono $h-$successioni nettamente semplificate.

Introducendo una nuova successione Δh, di termine generale $\Delta h_i = h_i - h_{i+1}$, si riesce a dimostrare il viceversa del Teorema 1. Precisamente, considerata una successione di interi positivi h_i decrescente, si dimostra che è una $h-$successione di uno spazio congiungente Σ se e solo se Δh è non crescente.

L'ultimo passo nella descrizione delle possibili $h-$successioni e $k-$successioni è stato quello di poter stabilire il massimo e minimo numero di $i-$piani di Hankel contenuti in Σ.

La seconda parte della tesi è incentrata sullo studio della varietà $H(r, m)$ riguardata come sottovarietà della grassmanniana $\boldsymbol{G}(r, m)$, sullo studio e caratterizzazioni di particolari sottovarietà di $H(r, m)$.

Dal punto di vista geometrico, il problema dello studio di sottovarietà di $\boldsymbol{G}(r, m) \subseteq \boldsymbol{P}^N, N = \binom{m+1}{r+1} - 1$, è classico e sono noti risultati riguardanti sottovarietà notevoli (incidente, secante, tangente una varietà V di $\boldsymbol{P}^m$)([1], [4]). Nella tesi si studiano analoghe sottovarietà di $H(r, m)$. In particolare tali sottovarietà risultano invarianti sotto l'azione di speciali proiettività di $\boldsymbol{P}^N$, costruite a partire da una proiettività di $\boldsymbol{P}^1$. Tali proiettività lasciano invariata la curva razionale normale dello spazio proiettivo ambiente, per cui, se la varietà V è proprio X_m, le sottovarietà di $H(r, m)$ incidente, secante, tangente X_m coincidono con le sottovarietà analoghe di $\boldsymbol{G}(1, m)$.

Problemi importanti sono i seguenti:

1. Studio della razionalità di $H(r, m)$(la risposta è positiva ed è stata data da Giuffrida e Maggioni in [3]).
2. Studio della dimensione di $H(r, m)$(in [3], Giuffrida e Maggioni hanno provato che $\dim H(r, m) = m + r$).
3. Singolarità di $H(r, m)$.
4. Descrizione di sottovarietà invarianti di $H(r, m)$.

Lo studio dei problemi 3 e 4 costituiscono il tema dominante della seconda parte della tesi. Relativamente al problema 3, la risposta è positiva già per $r = 1$, come prova il:

TEOREMA 2. – *Per $m > 3$, la varietà $H(1, m) \subset \boldsymbol{G}(1, m)$ delle rette di Hankel di $\boldsymbol{P}^m$ è singolare lungo la varietà $S_1(X_m) \subset \boldsymbol{G}(1, m)$ delle rette secanti X_m.*

Per $m = 3, H(1, m) = \boldsymbol{G}(1, m)$ ed è liscia. In effetti $\boldsymbol{G}(r, m)$ è liscia per ogni $r \leq m$. Nella direzione del punto 4, due risultati importanti sono i seguenti:

TEOREMA 3. – *Detta* $Inc_1(X_m) \subset H(1,m)$ *la varietà delle rette incidenti* X_m*, allora, per* $m > 2$*,* $Inc_1(X_m)$ *non è liscia ed è singolare lungo* $S_1(X_m)$*.*

PROPOSIZIONE 1. – *La varietà* $HInc_1(Sec_1(X_m)) \subseteq H(1,m)$ *delle rette di Hankel incidenti la varietà secante* $Sec_1(X_m) \subseteq \boldsymbol{P}^m$ *è una sottovarietà riducibile di dimensione* m *e presenta una componente di dimensione* m *e un'altra di dimensione* 5.

Nella terza parte della tesi si studiano, nel caso Hankel, le sottovarietà luoghi di $\boldsymbol{P}^m$ i cui elementi sono r-piani contenenti (o che incontrano)un fissato l-piano(vedi [1], [4] per le sottovarietà classiche), loro proprietà, ideale di definizione, dimensione. Un caso interessante è il seguente: sia dato un l-piano π_l, sghembo con X_m. Qual'è il luogo $H_{\pi_l}(l+1,m)$ di $\boldsymbol{P}^m$ degli $(l+1)$-piani di Hankel contenenti π_l ? Se π_l è di Hankel, otteniamo la seguente:

PROPOSIZIONE 2. – *Sia* $\pi_l \subseteq \boldsymbol{P}^m$ *un* $l-$*piano di Hankel non banale. Allora* $H_{\pi_l}(l+1,m)$ *è un cono di dimensione* $l+3$*, localmente completa intersezione, generato da ipersuperficie quadriche.*

Per $l = 0$, il risultato è dovuto a Giuffrida e Maggioni([3]).
Se invece π_l non è di Hankel, un primo risultato è stato ottenuto per $l = 1$ con la:

PROPOSIZIONE 3. – *Sia* $L \subset \boldsymbol{P}^m$ *una retta non di Hankel. Allora* $H_L(2,m)$ *ha una componente lineare di dimensione compresa tra* -1 *e* 3 *ed una componente che è un cono di dimensione* 4.

È emerso da alcuni esempi come il numero dei generatori della componente lineare di $H_L(2,m)$ vari e quindi dipenda dalla retta scelta L.

BIBLIOGRAFIA

[1] BELTRAMETTI M. C., CARLETTI E., GALLARATI G. e MONTI BRAGADIN G., *Letture su Curve, Superficie e Varietà Proiettive Speciali. Un' introduzione alla Geometria Algebrica*, Bollati Boringhieri (Torino, 2003).
[2] EISENBUD D., HULEK K. e POPESCU S., *A Note on the intersection of Veronece surfaces*, Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Commutative Algebra, Singularities and Computer Algebra (Sinaia, Romania, 2002).
[3] GIUFFRIDA S., MAGGIONI R., *Hankel Planes*, J. of Pure and Appl. Algebra, **209** (2007), 119-138.
[4] HARRIS J., *First Course of Algebraic Geometry*, Springer (1992).

Dipartimento di Matematica, Università di Messina
e-mail: gioiafailla@hotmail.it
Dottorato in Matematica
con sede presso l'Università di Messina – Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Prof. Salvatore Giuffrida, Università di Catania