La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Francesco Della Pietra

Risultati di esistenza per alcune classi di problemi ellittici nonlineari

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 231–234.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_231_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 231-234

Risultati di esistenza per alcune classi di problemi ellittici nonlineari

FRANCESCO DELLA PIETRA

L'obiettivo principale della tesi è quello di ottenere risultati di esistenza e di confronto per alcune classi di problemi di Dirichlet di tipo ellittico. Un ruolo fondamentale in tali risultati è giocato dalle stime a priori delle soluzioni, le quali vengono provate principalmente utilizzando la simmetrizzazione di Schwarz.

I metodi di simmetrizzazione, un insieme di tecniche essenzialmente riferibili all'uso di disuguaglianze isoperimetriche e delle proprietà dei riordinamenti, consentono di ottenere stime ottimali ed esplicite di soluzioni di problemi al contorno.

La nostra attenzione è rivolta a problemi di Dirichlet di tipo ellittico in forma di divergenza, formalmente scritti come

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(a(x,u,Du)) = H(x,u,Du) + f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $a(x,s,\xi)$ è un operatore di tipo Leray–Lions, possibilmente degenere, e $H(x,s,\xi)$ e f verificano appropriate condizioni. Si cercano stime a priori per soluzioni u di problemi del tipo (1), nel senso che

$$\|u\| \leq K\|f\|, \tag{2}$$

dove $\|u\|$ e $\|f\|$ sono appropriate norme di u ed f. Generalmente, la simmetrizzazione di Schwarz permette di ottenere la migliore costante in (2), nel senso che è possibile massimizzare il rapporto $\|u\|/\|f\|$, supponendo che i dati di (1) verificano appropriati vincoli e Ω varia tra i domini di misura di Lebesgue fissata.

Il primo obiettivo della tesi è, dunque, quello di stabilire un confronto, in qualche senso, tra una soluzione di un dato problema con la soluzione di uno "simmetrizzato", i cui dati sono a simmetria sferica.

Uno dei primi risultati generali in questa direzione è contenuto in [G. Talenti, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1976]. In tale lavoro si dimostra che se $u \in H_0^1(\Omega)$ è una soluzione del problema

$$-\big(a_{ij}(x)u_{x_i}\big)_{x_j} + c(x)u = f, \quad u \in H_0^1(\Omega), \tag{3}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ (supponendo $n \geq 3$ per semplicità),

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq |\xi|^2, \text{ per q.o. } x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$c(x) \geq 0$ e $f \in L^r(\Omega)$, con $r = 2n/(n+2)$, e se v è la soluzione del problema

$$-\Delta v = f^{\#}, \quad v \in H_0^1(\Omega^{\#}), \tag{4}$$

dove $\Omega^{\#}$ è la palla centrata nell'origine avente la stessa misura di Ω, e $f^{\#}$ è il riordinamento sferico decrescente di f [1], allora

$$u^{\#}(x) \le v(x), \quad \forall x \in \Omega^{\#}. \tag{5}$$

Il risultato di Talenti fornisce la soluzione più grande nella classe di equazioni (3), dove la misura di Ω è fissata e f ha riordinamento prescritto. Inoltre, la stima (5) consente di ottenere, ad esempio, che per ogni $s \in [1, +\infty]$

$$\|u\|_{L^s(\Omega)} \le \|v\|_{L^s(\Omega^{\#})}.$$

In questo ordine di idee, nella tesi presentiamo un risultato di confronto per equazioni il cui prototipo è

$$\begin{cases} -\Delta_p u + h(x)|Du|^{p-1} = c(x)|u|^{p-2}u + f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$ è l'operatore p–laplaciano, $1 < p < +\infty$, $|h|_{L^\infty(\Omega)} \le \beta$ (qui il caso $p = 2$ modella quello lineare) e c e f verificano appropriate ipotesi di sommabilità. Il nostro obiettivo è quello di confrontare una soluzione di (6) con la soluzione radiale $v = v^{\#}$ del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p v + \beta|Dv|^{p-2}Dv \cdot \dfrac{x}{|x|} = \Big((c^+)^{\#} - (c^-)_{\#}\Big)|v|^{p-2}v + f^{\#} & \text{in } \Omega^{\#} \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega^{\#}, \end{cases} \tag{7}$$

Osserviamo che, diversamente dal risultato di Talenti, nel problema "simmetrizzato" (7) si tiene conto del termine d'ordine zero. In generale, controesempi mostrano che questo porta a perdere un risultato di confronto puntuale tipo (5) in tutto $\Omega^{\#}$. Più precisamente, se u è una soluzione di (6), e $v = v^{\#}$ è la soluzione di (7), allora dato $s_0 = |\Omega| - |\{c^- > 0\}|$, e posto $R = \omega_n^{-1/n} s_0^{1/n}$, dove ω_n è la misura della palla unitaria in $\mathbb{R}^n$, si ha

$$u^{\#}(x) \le v(x), \quad \forall x \in \Omega^{\#} \colon |x| \le R,$$

$$\int\limits_{|y|<|x|} (u^{\#}(y))^{p-1} e^{-\beta|y|} dy \le \int\limits_{|y|<|x|} (v^{\#}(y))^{p-1} e^{-\beta|y|} dy, \quad \forall x \in \Omega^{\#}.$$

Molti risultati di questo tipo sono presenti in letteratura. Nella tesi è contenuto un risultato ottenuto in [1], dove entrambi i coefficienti di ordine zero e ordine uno sono considerati, $c \in L^r(\Omega)$, con $r > \max\{n/p, 1\}$, e $f \in L^q(\Omega)$, con $q > \max\{n/p, 1\}$. Osserviamo che il risultato di confronto vale se esiste un'unica soluzione (radiale) di (7). Questo non è garantito per ogni scelta dei coefficienti $\beta \ge 0$ e $c \in L^r(\Omega)$. Dunque, si stabilisce una condizione da imporre all'equazione al fine di ottenere un risultato di esistenza e unicità per il problema "simmetrizzato" (7).

Nella tesi studiamo inoltre problemi di Dirichlet il cui prototipo è

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(b(|u|)|Du|^{p-2}Du) = k(|u|)|Du|^q + f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

[1] Data $f : \Omega \to \mathbb{R}$ misurabile, denotiamo con $f^{\#}$ e $f_{\#}$ le funzioni a simmetria radiale, decrescente e crescente rispettivamente, definite in $\Omega^{\#}$, che conservano la misura degli insiemi di livello di $|f|$.

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $0 < p - 1 < q \leq p < +\infty$, k e b sono funzioni continue e tali che $k \geq 0$ e $b > 0$; infine il dato f è in $L^r(\Omega)$, $r > \max\{n/p, 1\}$.

Lo studio di (8) è motivato, tra l'altro, dal fatto che, in alcuni casi particolari, (8) è equivalente ad un problema tipo (6), con $\beta = 0$. Questo si può vedere facilmente per mezzo di un ben noto esempio, contenuto in [J.L. Kazdan e R.J. Kramer, Comm. Pure Appl. Math., 1978].

Problemi del tipo (8) sono stati molto studiati in letteratura sotto differenti ipotesi (ricordiamo i lavori di Boccardo, Murat e Puel tra il 1984 e il 1992, nel caso $p = q$ e b costante). I risultati che si possono ottenere sono di due tipi: in un caso, si stabilisce l'esistenza di soluzioni senza imporre alcuna condizione aggiuntiva su f; nell'altro caso si richiedono condizioni sulla piccolezza di qualche norma di f. Più precisamente, quando è possibile rimuovere le ipotesi di piccolezza su f, è necessario richiedere appropriate condizioni sulla struttura dell'equazione, come ipotesi di segno o particolari condizioni sulle funzioni $k(s)$ e $b(s)$.

Nella tesi presentiamo un risultato di esistenza per problemi del tipo (8) ottenuti in [2]. Il nostro approccio permette di trattare in modo unificato entrambi i casi in cui è richiesta una particolare ipotesi su f e i casi in cui tale ipotesi non è necessaria. Per esempio, quando $b \equiv 1$ in (8), il nostro risultato è come segue: se

$$c\|f\|_{L^r(\Omega)} < \sup_{s>0} W(s), \quad \text{con } W(s) = \int_0^s e^{-C\int_r^s k(y)^{\frac{1}{1-p+q}}\,dy}\, dr, \tag{9}$$

e le costanti c e C dipendono solo da p, q, n e $|\Omega|$, esiste una soluzione di (8).

La funzione $W(s)$ può essere limitata o meno. Nel primo caso, la condizione (9) è un'ipotesi sulla norma di f. Nel secondo caso, cioè $\sup_{s>0} W(s) = +\infty$, il nostro risultato non richiede alcuna ipotesi di piccolezza su f, in quanto (9) è sempre soddisfatta. Inoltre, l'approccio utilizzato consente di considerare la condizione più generale $\sup_{s>0} W(s) = +\infty$ piuttosto che $\lim_{s\to+\infty} W(s) = +\infty$ considerata in lavori precedenti. Il punto centrale è quello di ottenere una stima a priori per le soluzioni di (8), che noi dimostriamo, utilizzando metodi di simmetrizzazione, in termini di W, precisamente

$$W(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}) \leq c\|f\|_{L^r(\Omega)}, \tag{10}$$

dove c è la stessa costante che appare in (9). Se la condizione (9) non è soddisfatta, è chiaro che (10) non può dare alcuna informazione su $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$, poiché è banalmente verificata. D'altra parte, se, ad esempio, $W(s)$ è monotona, (9) e (10) immediatamente danno una stima L^∞ per u. In generale, sotto le nostre ipotesi, $W(s)$ non è monotona, e allora (9) e (10) non implicano direttamente una stima per u. Il punto principale nella dimostrazione del risultato di esistenza consiste nel mostrare che la sola ipotesi (9) consente di ottenere una stima uniforme per le soluzioni di appropriati problemi che approssimano (8). Passando al limite in tali problemi approssimanti, si ottiene il risultato di esistenza.

Osserviamo che, se $k \equiv 0$, l'equazione in (8) prende la forma

$$-\operatorname{div}(b(|u|)|Du|^{p-2}Du) = f \quad \text{in } \Omega. \tag{11}$$

Un tipico esempio è dato da una funzione $b(s)$ che va a zero quando $s \to +\infty$. In tal caso, l'operatore $u \mapsto -\operatorname{div}(b(|u|)|Du|^{p-2}Du)$ è, in generale, non coercivo.

Problemi del tipo (11) sono stati studiati da diversi autori (ricordiamo i lavori, per $p = 2$, [A. Alvino, V. Ferone e G. Trombetti, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 1998], e [L. Boccardo, A. Dall'Aglio e L. Orsina, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 1998], e per p qualunque, [A. Alvino, L. Boccardo, V. Ferone, L. Orsina e G. Trombetti, Ann. Mat. Pura Appl., 2003]). Un altro tipo di degenerazione può essere data, ad esempio, attraverso funzioni $b(s)$ che "esplodono" per valori finiti di s. Un modello tipico di tale problema è il seguente:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{|Du|^{p-2}Du}{(1-|u|)^a}\right) = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{12}$$

Qui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato, $1 < p < n$, $a > 0$ e f verifica appropriate ipotesi di sommabilità. Nella tesi affrontiamo lo studio dell'esistenza di soluzioni di problemi tipo (12), caratterizzati dal fatto che il termine $b(u) = 1/(1-|u|)^a$ "esplode" quando u si avvicina ai valori ± 1.

Nei risultati noti in letteratura (si veda, ad esempio, [L. Orsina, Asymptotic Anal. 2003], [D. Blanchard, H. Redwane, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 2002], [D. Blanchard, O. Guibé, H. Redwane, Ann. Mat. Pura Appl. 2008]) si dimostra, per $p = 2$ e sotto appropriate ipotesi, l'esistenza di soluzioni deboli $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema (12) tali che $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} < 1$ o, in un contesto più generale, l'esistenza di soluzioni che possono raggiungere i valori ± 1.

Nella tesi presentiamo alcuni risultati ottenuti in [3], dove si focalizza l'attenzione sul caso $1 < p < n$. I risultati di esistenza che si ottengono dipendono dalla sommabilità di b e da particolari ipotesi sul dato f, e sono di due tipi: il primo stabilisce l'esistenza di soluzioni che sono lontane dall'assumere i valori critici ± 1; il secondo consente alle soluzioni di raggiungere tali valori critici, anche su insiemi di misura di Lebesgue positiva. Nell'ultimo caso, a causa di tale comportamento, le soluzioni che si considerano sono quelle appartenenti ad una particolare classe di soluzioni di entropia.

BIBLIOGRAFIA

[1] DELLA PIETRA F., *Schwarz symmetrization in nonlinear elliptic problems with lower–order terms*, Ricerche Mat. **54**, n. 1 (2005), 165-183.

[2] DELLA PIETRA F., *Existence results for non-uniformly elliptic equations with general growth in the gradient*, Diff. Int. Eq., **21** (2008), 821-836.

[3] DELLA PIETRA F. e DI BLASIO G., *Existence results for nonlinear elliptic problems with unbounded coefficients*, Nonlinear Anal., **71** (2009), 72-87.

Dipartimento di Scienze Animali, Vegetali e dell'Ambiente,
Università del Molise
e-mail: francesco.dellapietra@unimol.it
Dottorato in Scienze Matematiche
con sede presso l'Università di Napoli "Federico II" - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Prof. V. Ferone, Università di Napoli "Federico II"