
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANGELO CALDARELLA

Strutture paraquaternionali su varietà differenziabili e strutture correlate

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 2 (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 219–221.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_219_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

Strutture paraquaternionali su varietà differenziabili e strutture correlate

ANGELO CALDARELLA

1. – Introduzione

Il lavoro presentato in questa tesi è volto all'analisi ed allo studio di alcuni aspetti riguardanti la geometria delle varietà differenziabili di dimensioni pari, munite di strutture (iper)paracomplesse e paraquaternionali, e di alcuni dei legami che intercorrono tra queste strutture e quelle che sembrano essere, passando a varietà di dimensioni dispari, strutture corrispondenti: le 3-strutture metriche miste.

I fondamenti dello studio delle strutture iperparacomplesse, che traggono origine dall'algebra \mathbb{H} dei numeri paraquaternionali (introdotti da James Cockle nel 1849, con la denominazione di "coquaternioni"), sono stati posti da P. Libermann, la quale, nel 1952, introdusse tali strutture con il nome di "strutture quaternionali del secondo tipo"; se, unitamente ad una struttura iperparacomplessa, si considera una metrica g sulla varietà, soddisfacente ad opportune condizioni di compatibilità, si perviene alla nozione di *struttura (quasi) iperparaHermitiana*. Siffatto tipo di struttura sta rivestendo, negli ultimi anni, un ruolo d'importanza crescente in ambiti di fisica teorica, in forza della sua naturale correlazione con la Teoria delle Stringhe e con la Teoria dei Sistemi Integrabili; da ciò segue un rinnovato interesse per tali strutture in ambito matematico. D'altro canto, nel corso degli ultimi dieci anni, si è rivolta sempre maggiore attenzione alle strutture di tipo paraquaternionale, in special modo da parte di N. Blažić e S. Vukmirović, i quali hanno fornito un'esposizione sistematica degli strumenti algebrici di base nel contesto paraquaternionale, studiando le proprietà della struttura algebrica di spazio vettoriale di tipo paraquaternionale, in analogia con il lavoro [1] di D. V. Alekseevsky e S. Marchiafava nel caso quaternionale.

Ulteriori studi sulle proprietà delle varietà paraquaternionali, legate in special modo ad alcune caratteristiche della geometria delle varietà paraHermitiane, sono stati condotti da S. Ivanov e S. Zamkovoy i quali, in collaborazione con I. Minchev, hanno definito e successivamente sviluppato le nozioni di spazio *twistor* e spazio *reflector* su una varietà paraquaternionale, adattando a tale contesto la costruzione degli spazi twistor elaborata da S. Salamon nel caso quaternionale.

L'introduzione su una varietà paraquaternionale di una metrica g soddisfacente ad opportune condizioni di compatibilità conduce alla nozione di *varietà paraquaternionale Kähleriana*, nella quale la metrica risulta avere necessariamente se-

gnatura pari. Alcune importanti proprietà di curvatura di quest'ultimo tipo di varietà sono state studiate da E. García-Río, Y. Matsushita e R. Vázquez-Lorenzo i quali, in [3], hanno esaminato il comportamento dell'operatore di Jacobi e, dopo aver introdotto la nozione di curvatura sezionale paraquaternionale, hanno dimostrato che ogni varietà paraquaternionale Kähleriana con dimensione maggiore di quattro è di Einstein.

Le peculiari caratteristiche, sin qui richiamate, di tali classi di varietà hanno quindi fornito sufficienti motivazioni per un'ulteriore indagine circa le loro reciproche relazioni, che sono state oggetto di studio in questa tesi.

2. – Contenuti

I contenuti sono organizzati in tre capitoli.

Nel primo capitolo, dopo una breve introduzione, si esaminano alcune proprietà relative a sommersioni semi-Riemanniane (cf. [2]) tra varietà paraquaternionali; si introduce prima la nozione di applicazione (Σ, Σ') -paraolomorfa tra due varietà quasi paraquaternionali (M, Σ) e (M', Σ') , quindi si procede a definire la nozione di *sommersione paraquaternionale* e, dopo un breve excursus sulle sottovarietà invarianti di una varietà quasi paraquaternionale Hermitiana, si studiano le prime proprietà di tali sommersioni e dei tensori di O'Neill; si ottiene quindi un risultato che stabilisce la non-esistenza di sommersioni paraquaternionali tra varietà paraquaternionali Kähleriane che non siano localmente iperparaKähleriane, oltre a risultati riguardanti l'annullarsi di entrambi i tensori di O'Neill di una sommersione paraquaternionale. Si fornisce un esempio della nozione introdotta che coinvolge il fibrato tangente ad una varietà paraquaternionale e, come applicazione del risultato ottenuto, si ricavano alcune proprietà della struttura paraquaternionale indotta sul fibrato tangente, munito della metrica di Sasaki. Si traducono infine i risultati ottenuti in termini di varietà paraquaternionali Kähleriane munite di un'aggiuntiva struttura quasi prodotto semi-Riemanniana.

Nel secondo capitolo si passa a trattare alcune proprietà delle applicazioni armoniche tra varietà paraquaternionali e, dopo aver ottenuto un'espressione per il campo di tensione di un'applicazione (Σ, Σ') -paraolomorfa tra due varietà quasi paraquaternionali Hermitiane, si utilizza tale espressione per stabilire condizioni sufficienti ad assicurare l'armonicità di una siffatta applicazione tra varietà paraquaternionali Kähleriane.

Nel terzo capitolo si studiano le correlazioni che intercorrono tra le strutture paraquaternionali ed opportune classi di strutture definite su varietà di dimensioni dispari. Inizialmente ci si concentra su alcune questioni circa le *para-fpk*-strutture su varietà, con particolare riguardo alle proprietà fondamentali delle strutture di para-K-contatto, paraSasakiane e paracontatto. Tali strutture, infatti, sono coinvolte nella definizione della nozione di *3-struttura metrica mista* su una varietà di dimensione dispari, di cui si analizzano alcune proprietà. Dopo aver introdotto, all'interno della

nozione di 3-struttura metrica mista, la definizione delle *3-K-strutture miste* e delle strutture *3-Sasakiane miste*, se ne mostra dettagliatamente il legame con le strutture paraquaternionali, attraverso due risultati di proiettabilità e, come applicazione di tali risultati, si riesamina in modo puntuale la costruzione della struttura paraquaternionale canonica sullo spazio proiettivo paraquaternionale $4n$ -dimensionale $P_n(\mathbb{H})$. Il capitolo si conclude dopo aver introdotto una terza classe particolare di 3-strutture miste, quella delle strutture *3-contatto miste*, dimostrando l'identità tra tali strutture e le strutture 3-Sasakiane miste, e provando, infine, che ogni varietà munita di struttura 3-Sasakiana mista è una varietà di Einstein.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALEKSEEVSKY D.V. e MARCHIAFAVA S., *Quaternionic structures on a manifold and subordinated structures*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **171** (1996), 205-273.
- [2] FALCITELLI M., IANUŞ S. e PASTORE A.M., *Riemannian submersions and related topics*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ (2004).
- [3] GARCÍA-RÍO E., MATSUSHITA Y. e VÁZQUEZ-LORENZO R., *Paraquaternionic Kähler manifolds*, Rocky Mountain J. Math., **31** (2001), 237-260.
- [4] IANUŞ S. e PASTORE A.M., *Harmonic maps and morphisms on metric f -manifolds with parallelizable kernel*, in Harmonic morphisms, harmonic maps, and related topics (Brest, 1997), Chapman & Hall/CRC (1997), 67-73.

Dipartimento di Matematica, Università di Bari
 e-mail: caldarella@dm.uniba.it
 Dottorato in Matematica
 con sede presso l'Università di Bari - Ciclo XX
 Direttore di ricerca: Prof.ssa A.M. Pastore, Università di Bari

