La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Ada Boralevi

Rappresentazioni di quivers e fibrati vettoriali omogenei su varietà di bandiera

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 211–214.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_211_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 211-214

Rappresentazioni di quivers e fibrati vettoriali omogenei su varietà di bandiera

ADA BORALEVI

1. – Coomologia di fibrati vettoriali omogenei su varietà di bandiera

Una varietà di bandiera—detta anche varietà razionale omogenea—è un quoziente G/P di un gruppo di Lie semisemplice G (complesso) con un suo sottogruppo parabolico P. Un fibrato vettoriale E su G/P è omogeneo se l'azione naturale del gruppo G sulle classi laterali G/P può essere sollevata ad un'azione su (le fibre di) E. Tradizionalmente nello studio dei fibrati omogenei viene usata l'equivalenza di categorie che li lega alla rappresentazioni di dimensione finita del sottogruppo parabolico P, ad anche ai $Lie(P)$-moduli interi. Questi oggetti hanno quindi una doppia natura: essi appartengono sia al mondo della geometria algebrica che a quello di teoria delle rappresentazioni, e possono essere studiati con strumenti provenienti da entrambe le discipline. L'utilità di questo approccio può non essere ovvia nel caso degli spazi proiettivi, che sono forse il caso più semplice di varietà razionali omogenee, ma diventa evidente già per le Grassmanniane, ed ancora di più per altre varietà di bandiera.

Uno dei risultati più importanti sui fibrati omogenei è il teorema di Borel-Weil-Bott, che calcola la coomologia di fibrati omogenei irriducibili sfruttando solo informazioni di teoria delle rappresentazioni. L'aggettivo irriducibile in questo contesto significa che tale è la rappresentazione di P associata. Le rappresentazioni irriducibili di P (e quindi i fibrati irriducibili su G/P) sono completamente classificate. Esse sono caratterizzate da un unico peso massimale; denotiamo con E_λ il fibrato omogeneo irriducibile corrispondente alla rappresentazione Σ_λ di P con peso massimale λ. Si noti che in questo caso il peso λ appartiene alla camera di Weyl fondamentale della parte riduttiva di P. Il parabolico P infatti si decompone in $P = R \cdot N$ una parte riduttiva (il fattore di Levi) ed una parte unipotente. A livello di algebre di Lie la decomposizione si legge come uno splitting $Lie(P) = Lie(R) \oplus Lie(N)$, ed una rappresentazione di $Lie(P)$ è completamente riducibile se e solo se è banale se ristretta a $Lie(N)$. Il teorema di Borel-Weil-Bott fornisce un algoritmo per il calcolo dei gruppi di coomologia $H^i(E_\lambda)$ basato unicamente sull'orbita del peso λ sotto l'azione affine del gruppo di Weyl.

Cosa si può dire della coomologia nel caso non irriducibile? In generale il sottogruppo P non è riduttivo, e questo complica non poco le cose. Ogni fibrato omogeneo E è dotato di una filtrazione $0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_k = E$, dove ogni E_i/E_{i-1} è completamente riducibile. Per ogni E e per ogni filtrazione esiste una successione spettrale che si avvicina alla coomologia $H^*(E)$. In [4] Ottaviani e Rubei danno un metodo più efficiente per il calcolo della coomologia, usando rappresentazioni di quivers. L'idea originale di usare quivers per studiare fibrati omogenei risale a Bondal e Kapranov [1], ed è stata poi migliorata da Hille [2].

Ad ogni varietà razionale omogenea G/P viene associato un quiver con relazioni $\mathcal{Q}_{G/P}$. Il gruppo G è preso semisemplice, complesso e di tipo ADE, poichè la costruzione del quiver è ben compresa solo in questo caso. I vertici del quiver corrispondono a fibrati omogenei irriducibili, che sono identificati ai pesi R-dominanti del fattore di Levi R di P. Le frecce (modulo traslazioni) del quiver corrispondono ai pesi della sottoalgebra nilpotente $Lie(N)$ di $Lie(P)$.

Dato un fibrato omogeneo E su G/P, è possibile associargli una rappresentazione del quiver $\mathcal{Q}_{G/P}$, che indichiamo con $[E]$. Imponendo sul quiver relazioni appropriate si ottiene un'equivalenza di categorie tra fibrati omogenei su G/P e rappresentazioni di dimensione finita di $\mathcal{Q}_{G/P}$. Il punto chiave consiste nel restringere il $Lie(P)$-modulo E alla parte riduttiva $Lie(R)$, ottenendo il graduato associato grE. La sottoalgebra $Lie(N)$ è essa stessa un $Lie(R)$-modulo per mezzo dell'azione aggiunta, e questo fornisce un morfismo naturale $\theta : Lie(N) \otimes grE \to grE$. Facendo i conti è facile accorgersi che c'è un'equivalenza di categorie tra i $Lie(P)$-moduli interi E e le coppie (grE, θ), nel caso in cui θ soddisfi la particolare uguaglianza $\theta \wedge \theta = \theta\varphi$, dove φ è la mappa che trasforma il prodotto wedge nel Lie bracket (tensorizzata con l'identità). Questa equivalenza permette di "separare" le due informazioni che definiscono il fibrato E rispettivamente sulla parte riduttiva e nilpotente di $Lie(P)$, e quindi di estrapolare l'informazione di cui abbiamo bisogno per definire la rappresentazione $[E]$ rispettivamente sui vertici e sulle frecce del quiver. Il morfismo θ contiene inoltre le relazioni che dobbiamo imporre sulle frecce del quiver per ottenere l'equivalenza di categorie.

La coomologia di un fibrato vettoriale omogeneo E è ottenuta in [4] come coomologia di un complesso $(H^*(grE), c_*)$. Le applicazioni lineari c_i sono costruite componendo le mappe della rappresentazione del quiver $[E]$ lungo i segmenti che uniscono i vertici del quiver con il loro riflesso simmetrico nella camera di Bott adiacente, seguendo cioè le orbite affini di Weyl come prescritto dall'algoritmo di Borel-Weil-Bott. Il loro risultato vale nel caso in cui G/P è Hermitiana simmetrica, di tipo ADE. Si noti che in questo caso l'uguaglianza fondamentale $\theta \wedge \theta = \theta\varphi$ è ridotta alla più semplice relazione $\theta \wedge \theta = 0$.

Nel caso non Hermitiano simmetrico le cose sono complicate dal fatto che ci sono frecce nel quiver che corrispondono ad elementi dell'algebra derivata $[Lie(N), Lie(N)]$. Tuttavia se ci limitiamo a calcolare le sezioni dei fibrati omogenei tale proplema può essere evitato. Il punto centrale nella nostra costruzione, come in quella di Ottaviani e Rubei è lo studio di fibrati omogenei speciali, la cui rappresentazione del quiver associata ha supporto su un quiver di tipo A_m, e che quindi godono di "buone" proprietà di spezzamento previste dalla teoria dei quivers. Grazie a questi fibrati è possibile dare un'interpretazione della mappa cobordo in coomologia come mappa di rappresentazioni di quivers, e di collegarla quindi alla mappa $c_0 : H^0(grE) \to H^1(grE)$, che generalizza la costruzione di [4] per tutte le varietà razionali omogenee di tipo ADE. Il risultato principale è il seguente:

TEOREMA 1. – *Sia E un fibrato vettoriale omogeneo su una varietà razionale omogenea G/P, dove G è un gruppo di Lie complesso, semisemplice e di tipo ADE e P un suo sottogruppo parabolico. Si consideri il morfismo $c_0 : H^0(grE) \to H^1(grE)$ ottenuto componendo le applicazioni lineari nella rappresentazione $[E]$ del quiver $\mathcal{Q}_{G/P}$ lungo i segmenti che collegano ogni vertice in $H^0(grE)$ con i loro riflessi nell'adiacente camera di Bott. Si ha che: $H^0(E) = \ker c_0$.*

2. – Semplicità e stabilità del fibrato tangente su varietà di bandiera

Usando il quiver descritto sopra è possibile dimostrare che i fibrati omogenei la cui rappresentazione del quiver associata ha una configurazione particolare—questi fibrati sono detti multiplicity free—sono debolmente semplici, che significa che i loro unici endomorfismi G-invarianti sono multipli scalari dell'identità. Il risultato è vero su ogni G/P, con G semplice, complesso e di tipo ADE:

PROPOSIZIONE 1. – *Sia E un fibrato vettoriale omogeneo multiplicity free su una varietà razionale omogenea G/P, con G semplice, complesso e di tipo ADE. Sia k il numero delle componenti connesse del supporto della rappresentazione $[E]$ del quiver $\mathcal{Q}_{G/P}$. Si ha che $H^0(End\,E)^G = C^k$. In particolare se tale supporto è connesso, il fibrato E è debolmente semplice.*

È facile dimostrare che data una qualsiasi varietà come nella Proposizione 1, il fibrato tangente $T_{G/P}$ è multiplicity free e con supporto connesso. Inoltre un argomento combinatorico prova che la componente isotipica $H^0(End\ T_{G/P})^G$ coincide con l'intero spazio $H^0(End\ T_{G/P})$, e quindi che, in altre parole, il fibrato è semplice:

TEOREMA 2. – *Il fibrato tangente $T_{G/P}$ di una varietà razionale omogenea G/P (G semplice, complesso e di tipo ADE) è semplice.*

In [5] Ramanan ha dimostrato che i fibrati omogenei irriducibili su varietà razionali omogenei sono stabili, e quindi in particolare semplici. Nel caso Hermitiano simmetrico questo risultato si applica al fibrato tangente, quindi il Teorema 2 può essere pensato come una generalizzazione del risultato di Ramanan. Cosa si può dire sulla stabilità nel caso generale? Una varietà razionale omogenea può essere vista come una varietà di Kähler, ed in quanto tale essa ammette una struttura di Hermite-Einstein. In virtù della corrispondenza di Hitchin-Kobayashi questo equivale alla polistabilità del fibrato tangente. Un fibrato polistabile è somma diretta di fibrati stabili con la stessa pendenza. Questa osservazione unita alla semplicità insieme danno:

TEOREMA 3. – *Sia $T_{G/P}$ il fibrato tangente di una varietà razionale omogenea G/P (G semplice, complesso e di tipo ADE). $T_{G/P}$ è stabile rispetto alla polarizzazione anticanonica $-K_{G/P}$ indotta dalla struttura di Hermite-Einstein.*

Nel caso in cui G/P è una varietà di incidenza punto-iperpiano in P^n, nella mia tesi è possibile ottenere una completa caratterizzazione della stabilità del fibrato tangente rispetto a diverse polarizzazioni:

PROPOSIZIONE 2. – *Sia $F = F(0, n-1, n)$ la varietà di incidenza punto-iperpiano, e sia:*

$$m(n) = \frac{-n + n\sqrt{4n^2 + 4n - 3}}{2(n^2 + n - 1)}.$$

Il fibrato tangente T_F è stabile rispetto alla polarizzazione $\mathcal{O}_F(a, b)$ se e solo se è semistabile se e solo se $m(n)a \leq b \leq m(n)^{-1}a$.

L'ultima parte della tesi è dedicata al problema di costruire spazi di moduli. Generalizzo alcuni risultati di [4], dove gli autori dimostrano che la nozione di semistabilità per una rappresentazione $[E]$ del quiver $\mathcal{Q}_{G/P}$ introdotta da King [3] è equivalente alla classica nozione di semistabilità di Mumford-Takemoto del fibrato E su G/P associato. Si possono quindi costruire spazi di moduli di fibrati omogenei semistabili E con graduato grE fisso su tutte le varietà razionali omogenee G/P di tipo ADE.

BIBLIOGRAFIA

[1] A.I. BONDAL and M.M. KAPRANOV, *Homogeneous bundles*, Helices and Vector Bundles, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **148** (1990), 45-55.
[2] L. HILLE, *Homogeneous vector bundles and Koszul algebras*, Math. Nachr., **191** (1998), 189-195.
[3] A. D. KING, *Moduli of representations of finite-dimensional algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **45** (1994), 515-530.
[4] G. OTTAVIANI and E. RUBEI, *Quivers and the cohomology of homogeneous vector bundles*, Duke Math. J., **132** (2006), 459-508.
[5] S. RAMANAN, *Holomorphic vector bundles on homogeneous spaces*, Topology, **5** (1967), 159-167.

Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, USA
e-mail: boralevi@math.tamu.edu
Dottorato in Matematica
con sede presso l'Università di Firenze – Ciclo XX
Direttore della ricerca: Prof. Giorgio Ottaviani