La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Chiara Baldovino

Ordine di sequenzialità di spazi sequenziali compatti

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2009), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 199–202.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2009_1_2_2_199_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2009.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. II, Agosto 2009, 199-202

Ordine di sequenzialità di spazi sequenziali compatti

CHIARA BALDOVINO

Mentre al problema riguardante la possibilità di produrre esempi di spazi sequenziali di ogni ordine di sequenzialità, e posto in maniera naturale negli anni Sessanta, venne data risposta positiva da Arhangel'skiĭ e Franklin, risulta notevolmente complesso tentare di costruire spazi sequenziali compatti anche solo di ordine di sequenzialità 3 senza ulteriori ipotesi della Teoria degli Insiemi.
In un simile contesto problematico l'articolo di Baškirov pubblicato nel 1974 (si confronti [2]) riveste un ruolo di rilievo: in questo lavoro l'autore mostra come costruire spazi sequenziali compatti di ogni ordine di sequenzialità sotto l'Ipotesi del Continuo.

La tesi si presenta come una revisione ed un'integrazione necessaria del lavoro di Baškirov: questo infatti prevede esclusivamente uno schema di dimostrazione mancante di qualsiasi verifica nel quale non viene posto in evidenza dove l'Ipotesi del Continuo sia utilizzata in maniera essenziale.

Riassumiamo brevemente i passi cruciali della costruzione. La costruzione degli spazi compatti di ordine di sequenzialità pari ad un ordinale successore viene portata a termine per induzione transfinita. Una volta costruiti tutti gli spazi compatti $K_{\sigma_\gamma+1}$ di ordine $\sigma_\gamma + 1 < \omega_1$, risulta semplice la costruzione di uno spazio di ordine β per ogni ordinale limite $\beta \leq \omega_1$: infatti è sufficiente prendere in considerazione la somma disgiunta di un'infinità di spazi $K_{\sigma_\gamma+1}$ con $\sup\{\sigma_\gamma + 1\} = \beta$; tale spazio ha ordine di sequenzialità uguale a β e la sua compattificazione ad un punto, oltre ad essere evidentemente compatta, continua ad avere ordine di sequenzialità β come si voleva. Di fatto il problema si riduce pertanto a produrre esempi di spazi compatti con ordine di sequenzialità un ordinale successore. Si costruiscono spazi compatti $K_{\alpha+1}$ con ordine $\alpha + 1$ per ogni ordinale successore $\alpha + 1 < \omega_1$; questi risultano essere tutti spazi quozienti di $\beta\omega$, $K_{\alpha+1} = \beta\omega/ \approx_{\alpha+1}$, dove le relazioni di equivalenza $\approx_{\alpha+1}$ sono tali da identificare a loro stessi esclusivamente gli elementi di ω. Con $j_{\alpha+1}$ denotiamo la proiezione canonica $j_{\alpha+1} : \beta\omega \to K_{\alpha+1}$. Per ogni $\alpha + 1 < \omega_1$, lo spazio $K_{\alpha+1}$ è uno spazio scattered su ω in cui il livello di scattering di ogni punto coincide con l'ordine di sequenzialità del punto rispetto ad ω. Si dimostra inoltre che tutti gli spazi $K_{\alpha+1}$ soddisfano le seguenti condizioni:

S.1 Lo spazio $K_{\alpha+1}$ può essere rappresentato in modo unico come

$$K_{\alpha+1} = L_0 \bigsqcup \Big(\bigsqcup_{\gamma \leq \alpha} L_{\gamma+1} \Big).$$

I punti di livello $\gamma+1$ con $\gamma \in [0, \alpha]$, vale a dire i punti appartenenti all'insieme $L_{\gamma+1}$, hanno ordine di sequenzialità $\gamma+1$ rispetto a $L_0 = \omega$.

S.2 L'insieme $L_{\alpha+1}$ è costituito dall' unico punto x_∞.

S.3 Ogni punto di $K_{\alpha+1}$ di livello differente da zero ha una base costituita da sottoinsiemi aperti e chiusi denominati elementari; se U è un intorno elementare di un punto di livello $\gamma+1$, allora la relazione $\approx_{\alpha+1}$ ristretta a $\tilde{U} = j_{\alpha+1}^{-1}(U)$ dà luogo allo spazio compatto $\tilde{U}/\approx_{\alpha+1}$ che risulta essere omeomorfo allo spazio $K_{\gamma+1}$.

S.4 Per ogni $\gamma \leq \alpha$, se una successione non costante $\{x_n\}_{n\in\omega}$ con $x_n \in L_{\gamma_n+1}$ di punti con livelli non decrescenti converge ad un punto $x \in L_{\gamma+1}$, allora la successione di ordinali $\{\gamma_n+1\}_{n\in\omega}$ è tale che $\sup\{\gamma_n+1\} = \gamma$.

S.5 Per ogni $\gamma \leq \alpha$, da ogni successione iniettiva $\{x_n\}_{n\in\omega}$ con $x_n \in L_{\gamma_n+1}$ di punti con livelli non decrescenti tali che $\sup\{\gamma_n+1\} = \gamma$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad un punto di livello $\gamma+1$.

S.6 Se $\{N_i\}_{i\in\omega}$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi infiniti $N_i \subset \omega$ a due a due disgiunti e se, per ogni $i \in \omega$, su $\overline{N_i}$ viene posta una relazione di tipo β_i+1 in modo tale che la successione di ordinali $(\beta_i+1)_{i\in\omega}$ sia non decrescente e che $\sup\{\beta_i+1\} = \alpha$, allora è possibile estendere la relazione ottenuta su $\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{N_i}$ ad una relazione su $\beta\omega$ di tipo $\alpha+1$.

Come base dell'induzione si considerano gli spazi K_1 (omeomorfo ad una successione con punto limite) e K_2 (omeomorfo alla compattificazione ad un punto dello spazio di Mrówka-Isbell): si verifica, in particolar modo, che le proprietà dalla S_1 alla S_6 sono valide in questi spazi; è opportuno mettere in luce come questi due spazi siano costruiti in ZFC senza ulteriori ipotesi.

A questo punto si assume di aver costruito tutti gli spazi sequenziali compatti $K_{\gamma+1}$ di ordine $\gamma+1$ per ogni $\gamma+1 < \alpha+1$ e che le proprietà dalla S_1 alla S_6 siano verificate in ciascuno di questi spazi.

Sfruttando l'ipotesi induttiva, attraverso una seconda induzione transfinita, si costruirà lo spazio $K_{\alpha+1}$ che presenta un punto x_∞ tale che il suo livello di scattering rispetto ad ω è $\alpha+1$ e coincide con il suo ordine di sequenzialità rispetto a questo stesso insieme.

Nella costruzione dello spazio $K_{\alpha+1}$ risulta fondamentale enumerare gli elementi dell'insieme Γ i cui elementi sono tutte le famiglie $\mathcal{C}_\xi$ costituite da un'infinità numerabile di sottoinsiemi clopen a due a due disgiunti di ω^*. L'Ipotesi del Continuo rende possibile la corrispondenza biunivoca tra gli elementi di Γ e la lunghezza della seconda induzione transfinita: infatti grazie a tale ipotesi Γ può essere enumerato come $\Gamma = \{\mathcal{C}_\xi : \omega \leq \xi < \omega_1\}$ il che permette di portare a termine la costruzione.

La compattezza di $K_{\alpha+1}$ segue da quella di $\beta\omega$ e dal fatto che $K_{\alpha+1}$ è uno spazio di Hausdorff. La verifica della validità delle proprietà S_4 ed S_5, oltre ad assicurare la sequenzialità dello spazio K_{a+1}, permette di provare che il livello di scattering di ogni punto coincide con l'ordine di sequenzialità del punto rispetto ad ω.

Nel prosieguo della tesi ci si è posti il problema di determinare l'ordine di sequenzialità del prodotto di due spazi costruiti secondo lo schema di Baškirov con un generico ordine di sequenzialità. Nel 1995 Nogura e Shibakov dimostrarono un risultato generale secondo il quale il prodotto di uno spazio sequenziale X e uno spazio regolare (localmente) numerabilmente compatto e sequenziale Y è ancora sequenziale e risulta che il suo ordine di sequenzialità risulta minore o uguale della somma degli ordini di sequenzialità degli spazi X ed Y (cf. [4]). Dal momento che gli spazi di Baškirov sono sequenziali e compatti anche il prodotto di due di essi è ancora compatto e sequenziale e quindi ha senso interrogarsi sull'ordine di sequenzialità di tali prodotti. Lo studio di tale questione è stata affrontata suddividendola nei tre seguenti casi:

i) il prodotto di due spazi di Baškirov con ordine di sequenzialità due ordinali successori;
ii) il prodotto di due spazi di Baškirov di cui uno con ordine di sequenzialità un ordinale successore e l'altro un ordinale limite;
iii) il prodotto di due spazi di Baškirov con ordine di sequenzialità due ordinali limiti.

Si è concluso che

TEOREMA 1. – *Se K_a e K_β sono spazi di Baškirov con ordine di sequenzialità rispettivamente a e β il loro prodotto ha ordine di sequenzialità pari al massimo tra a e β.*

La tesi presenta poi un confronto tra il lavoro di Baškirov e quello molto più recente di Dow nel quale egli presenta la costruzione di uno spazio sequenziale compatto di ordine di sequenzialità 4 utilizzando l'assioma di Martin (si veda [3]), il risultato migliore che si è riusciti ad ottenere fino ad oggi sotto queste ipotesi.

Mentre Baškirov suggerisce una costruzione dall'"alto" verso il "basso", Dow utilizza una tipologia costruttiva che va dal "basso" all'"alto": Baškirov infatti lavora nello spazio $\beta\omega$ e, ipotizzando di aver costruito tutti gli spazi di ordine di sequenzialità un ordinale successore minore di un determinato ordinale successore $a+1$, è in grado di costruirne un opportuno spazio quoziente sul quale apportare poi ulteriori modifiche; l'Ipotesi del Continuo gli assicura che dopo ω_1 iterazioni del processo di modifica la relazione di equivalenza finale introdotta su $\beta\omega$ è tale da garantire la presenza di un nuovo punto con ordine di sequenzialità pari a $a+1$ nello spazio quoziente. Dow invece parte dallo spazio dei numeri naturali considerato con la topologia discreta e, passo a passo, costruisce tre opportune famiglie di sottoinsiemi di ω in modo da produrre punti di livello 1, 2 e 3; alla fine egli aggiunge un punto di livello 4.

Vogliamo ricordare che l'assioma del Proper Forcing (PFA) implica l'assioma di Martin ed il fatto che $\mathfrak{c} = \omega_2$. L'importanza di determinare il massimo ordine di sequenzialità di uno spazio compatto in presenza dell'assioma del Proper Forcing venne fuori dalla risoluzione del problema di Moore-Mrówka da parte di Balogh nel 1989: egli provò che ogni spazio compatto di tightness numerabile è sequenziale sotto l'assioma del Proper Frocing (si veda [1]). Se esistesse una limitazione finita all'ordine di sequenzialità degli spazi compatti in presenza del Proper Forcing, ciò significherebbe che gli spazi compatti di tightness numerabile si discostano poco dagli spazi di Fréchet. In ogni caso il problema risulta ancora aperto.

BIBLIOGRAFIA

[1] Z. Balogh, *On compact Hausdorff spaces of countable tightness*, Proc. Amer. Math. Soc., **105** (3) (1989), 755-764.
[2] A. I. Baškirov, *The classification of quotient maps and sequential bicompacta*, Soviet Math. Doklady, **15** (1974), 1104-1109.
[3] A. Dow, *Sequential order under MA*, Topology Appl., **146-147** (2005), 501-510.
[4] T. Nogura e A. Shibakov, *Sequential order of product spaces*, Topology Appl., **65** (3) (1995), 271-285.

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino
e-mail: chiara.baldovino@polito.it
Dottorato in Matematica con sede presso l'Università di Milano - Ciclo XX
Direttore di ricerca: Prof. Gino Tironi, Università di Trieste