Salomon Ofman

Movimento ed origine del calcolo infinitesimale. Teorizzazione del movimento ed infinitesimali

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.3, p. 555–587.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_3_555_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica
Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Dicembre 2008, 555-587

Movimento ed origine del calcolo infinitesimale. Teorizzazione del movimento ed infinitesimali

SALOMON OFMAN

In un precedente lavoro ([OFM2]) abbiamo posto le fondamenta generali della teoria del movimento da un punto di vista filosofico e matematico. Dal punto di vista filosofico si trattava di capire l'opposizione tra l'uno e il multiplo, opposizione che, da un punto di vista matematico, è quella tra il discreto e il continuo.

In questo lavoro, ci proponiamo di mostrare come l'introduzione massiccia, da parte di Galileo, della matematica nella fisica, ha condotto ad un cambiamento della nozione stessa di movimento. Inversamente, questa teorizzazione fisica del movimento è all'origine dell'elaborazione degli infinitesimali, uno tra i maggiori sconvolgimenti nella matematica.

Tutte le referenze all'opera di Galileo rimandano all'Edizione Nazionale ([GAL]).

I. Aristotele e la fisica del movimento.

1. *Alcuni concetti della Fisica di Aristotele.*

Esporremo brevemente la teoria del filosofo riguardo al movimento. Una difficoltà, ricorrente nell'analisi del pensiero aristotelico, risiede nel fatto che non si trova sempre uno svolgimento univoco nelle sue varie opere scientifiche che in un certo modo, trattano tutte di questa problematica. Per Aristotele, infatti, ogni dato fisico è in qualche modo soggetto al movimento. Il nostro percorso adotta un senso teleologico visto che il nostro obiettivo principale è di sottolineare i tratti che si ritrovano alle fondamenta della concezione del movimento fino all'epoca medievale. È proprio in opposizione esplicita a questa teoria (vedere la lettera di Galileo a Fortunio Liceti, 15 settembre 1640) che sarà fondata la fisica moderna, che inizia con Galileo.

Questo percorso teleologico è conforme, se non alla storia delle idee, almeno alla filosofia dello Stagirita. La sua concezione di causalità ammette infatti quattro forme di cause di cui una, quella principale, è la causa finale cioè lo scopo per il quale un evento si produce.

I cinque punti fondamentali, benché non esaurienti, sui quali si basa la teoria del movimento nella *Fisica* sono i seguenti:

A. Il continuo è quanto è indefinitamente divisibile (VI,1, 231 b 15)

B. Nessun infinito esiste realmente o in realtà (1).

*C. La Fisica (cioè la Natura) è un principio di movimento e riposo (*κινεῖσθαι καὶ ἠρεμεν*) (II, 1, 192 b 21-22)*

D. Fisici e matematici differiscono in quanto i primi studiano i corpi naturali, i secondi delle astrazioni (punti, linee, piani, forme solide) relative a questi corpi.

E. Le categorie (cioè le proprietà essenziali degli esseri) di quantità e di qualità non possono scambiarsi tra di loro. Questo va inteso generalmente come l'affermazione di una disgiunzione completa tra le due.

Per evitare le insidie poste dai vari significati contemporanei di «velocità», useremo il termine «celerità» per tradurre le molteplici nozioni di rapidità di un movimento.

Non bisogna credere che queste ambiguità siano dovute esclusivamente alla lingua. Per esempio il termine classico latino *velocitas* usato nella scolastica, che si traduce con velocità, pone le stesse difficoltà. Secondo la traduzione scelta si arriva a delle interpretazioni molto diverse.

C'è chiaramente una difficoltà inerente a questo tipo di nozioni, quando si tratta di stabilire una relazione tra un concetto intuitivo e la sua definizione fisico-matematica. Come osservato da Poincaré riguar-

(1) Lo statuto dell'infinito aristotelico è estremamente complesso e non possiamo discuterlo qui. Semplificando all'estremo, diciamo che, posto tra l'essere e il non-essere, il suo *grado* di realtà è particolarmente basso. Tale questione è studiata più in dettaglio in [OFM3] attraverso un'analisi del continuo aristotelico e delle sue relazioni con la topologia moderna.

do al calcolo infinitesimale, i problemi che si pongono a proposito di un enunciato mettono generalmente in evidenza delle difficoltà legate alla natura della cosa di cui si parla ([POI], App., II.2, p. 192). È in queste situazioni che, secondo Platone, l'intelligenza è in lotta con se stessa (vedere [OFM3], § III.3).

2. *La nozione di movimento in Aristotele.*

La Fisica di Aristotele («*περὶ φύσεως*», che si dovrebbe tradurre più precisamente con «inchiesta sulla natura») si occupa degli oggetti del cambiamento (III, 1, 200b12). Il termine greco generale per «cambiamento» è μεταβολή, ma la maggior parte del tempo Aristotele usa κίνησις (movimento). Bisogna quindi ammettere che il movimento, secondo Aristotele, riguarda ogni cambiamento e non solo quello di un corpo mobile (quindi il caldo e il freddo, la moralità e l'amoralità, la giustizia e l'ingiustizia). La celerità del movimento essendo una qualità di questo movimento (si parla sempre di un movimento, una macchina, ..., rapido o veloce), dalla proprietà 1. E si conclude che la rapidità non può essere misurata.

Ma un corpo mobile può essere più o meno rapido di un altro. Infatti, una qualità, secondo Aristotele, è soggetta «al più e al meno», un uomo più felice o meno felice, un mantello più o meno bianco e naturalmente Achille più veloce della tartaruga più lenta. La disgiunzione aristotelica qualità/quantità va compresa quindi non dal punto di vista dell'addizione/sottrazione ma da quello della moltiplicazione/divisione. È possibile aumentare o diminuire una qualità come una quantità. Al contrario, se è possibile moltiplicare e dividere la seconda, per quanto riguarda la prima, le cose vanno diversamente. Pertanto la possibilità di parlare di «più rapido» o «più lento» non pone veramente un problema per quanto riguarda una qualità. Una quantità è misurabile perché esiste un'unità (IV, 12, 220b14-24). Ma non esiste nessuna unità per una qualità, per esempio per la giustizia e l'ingiustizia, il bianco e il non-bianco, il caldo e il freddo e, nello stesso modo, la celerità e la lentezza.

Associato all'«interdetto canonico» di tutte le scienze greche secondo il quale non si potevano dividere quantità eterogenee, il sistema aristotelico avrebbe reso impossibile ogni matematizzazione del movimento. Infatti questa richiede la divisione di una distanza per un tempo. È quello che chiameremo nel seguito l'interpretazione standard.

3. *I problemi che pone questa interpretazione.*

Si trovano però nella letteratura esegetica varie descrizioni matematiche del movimento e anche della rapidità. Per esempio nella classica traduzione (e nei commenti) di Ross (p. 28), l'autore ha fatto ricorso, per rendere conto del testo di Aristotele, alle seguenti formule:

(1) $$\mathbf{D = C{\cdot}M{\cdot}T/\ densità\ del\ mezzo}$$

(2) $$\mathbf{V = C{\cdot}M/\ densità\ del\ mezzo}$$

dove il mezzo è quello in cui si muove il corpo (aria, acqua, ...), M la massa del corpo, T il tempo e C una costante (il segno «·» tra C, M e T è un'aggiunta, nel commento originale il segno moltiplicativo non è indicato) (p. 28).

Bisogna osservare che si è stabilito un rapporto tra termini che si suppone siano puramente qualitativi. Ma queste equazioni contraddicono l'interdetto numerico che, stando all'interpretazione standard, dovrebbe riguardare il movimento. Infatti una prima conseguenza di queste formule è la misurabilità della celerità, una qualità, in contraddizione con l'interpretazione usuale del punto fondamentale 1.E di cui sopra.

Inoltre l'equazione (1) non avrebbe senso, perché usa un rapporto tra cose eterogenee (massa, tempo, densità). Secondo Aristotele il tempo è il numero del movimento (IV, 11, 219b2). Questa definizione è essa stessa molto problematica ed è stata l'oggetto di critiche dall'antichità greca. Così secondo Simplicio, già Stratone de Lampsaco (intorno al -300) obiettava che il numero era una quantità discreta (διωρισμένον), mentre il tempo, essendo continuo, non era numerabile (ἀριτμηετόν). Torneremo su questa questione. Ma per lo meno tutti i termini di (1) sono delle quantità.

Al contrario l'equazione (2) presuppone la possibilità di una misurazione matematica della celerità/rapidità che non è una quantità ma una qualità. Ma l'argomentazione principale dell'interpretazione standard è che una tale misurazione non compare nel testo di Aristotele, inoltre contraddirebbe ugualmente 1.E.

Naturalmente, e Ross lo scrive chiaramente, Aristotele non ha mai scritto queste equazioni. Tuttavia lo Stagirita afferma che il rapporto (λόγος) delle distanze percorse da due corpi mobili con la medesima rapidità nel medesimo intervallo di tempo, è uguale all'inverso della densità del mezzo nel quale si muovono (IV, 8, 215 a29-b12). Aristotele, per la verità, considera solo rapporti interi. Anche Galileo utilizza nei suoi esempi rapporti interi. Possiamo quindi pensare che entrambi adottino questa limitazione per semplice comodità. Così, ed è quello che importa qui, queste formule sembrano rispecchiare bene il pensiero di Aristotele riguardo al movimento e la celerità e quindi sembrano essere il modo più efficace per capire tale pensiero.

E troviamo precisamente nella *Fisica*, in modo esplicito, un rapporto tra celerità che sono dunque trattate, nel senso euclideo, come delle grandezze (vedere § I.3′):

> «*Vi è quindi la medesima proporzione (*λόγον*) tra [la facilità di penetrazione nell'] (l')aria e [quella nell'] (l')acqua che tra la velocità (*τάχος*) nell'una e la velocità nell'altra*» ([ARI], IV, 215b5-10).

Questo può essere riscritto con simboli matematici:

$$C_1/C_2 = R_2/R_1$$

dove, per un mobile dato, C_1 e C_2 sono rispettivamente la sua celerità nell'aria e nell'acqua, mentre R_1 e R_2 rappresentano qualcosa come le resistenze dell'aria e dell'acqua a questo mobile.

Pertanto sembra esagerato sostenere che questa fisica è radicalmente incompatibile con ogni interpretazione matematica (vedere [KOY3], p. 17). Questo chiaramente non significa che siamo in presenza, come in Galileo, di una teoria matematica verificabile passo a passo con esperimenti.

A questi testi tratti dal corpus aristotelico vorremmo aggiungerne altri due più antichi, raramente citati in questo contesto. In *Il Politico*, Platone divide «la tecnica della misura» in quattro parti: «il numero, la lunghezza, la profondità, la larghezza e la velocità» (ταχυτής) ([PLA3], 284e). Nel *Lachete*, Socrate prende come modello di una definizione quella di «velocità» (ταχυτής) e la definisce in termini quantitativi:

> *«Se quindi qualcuno mi chiedesse: "Dimmi, Socrate, in cosa consiste, in qualsiasi caso, quello che chiami 'velocità'?, gli risponderei che, per quanto mi riguarda, chiamo velocità la capacità di fare più cose in poco tempo»* ([PLA4], 192e; siamo noi a sottolineare).

Non sembra quindi assolutamente illegittimo ad Aristotele e più generalmente ai greci antichi, se non di moltiplicare e dividere termini eterogenei, distanze per tempi, almeno di moltiplicare e dividere numericamente la celerità.

L'interpretazione standard non sembra potere rendere conto in modo soddisfacente degli approcci quantitativi della *Fisica*. Vedremo nel seguito che questa interpretazione conduce a delle difficoltà ancora più serie, ad iniziare negli *Elementi* di Euclide.

3′. *Categorie aristoteliche e gli* Elementi *di Euclide.*

Vorremmo mostrare in questo paragrafo che la disgiunzione tra varie categorie, in particolare tra qualità e quantità, non è sempre rispettata nei testi matematici. Lo stesso accade per quest'altro confine, ben più importante per i matematici, che separa il discreto dal continuo o l'aritmetica dalla geometria.

È nel libro I che Euclide tratta degli angoli. I matematici greci antichi consideravano non solo angoli tra rette, quelli che noi chiamiamo ancora angoli, ma anche tra curve, per esempio tra una circonferenza e la sua tangente in un punto. L'angolo vi è definito come una qualità o una relazione (inclinazione). Tuttavia è trattato come una grandezza, in particolare è sempre divisibile. Da cui l'interpretazione di Proclus (un millennio dopo) per il quale l'angolo sarebbe partecipe delle tre categorie.

Il libro V degli *Elementi* costruisce una teoria estremamente elaborata delle proporzioni per le grandezze o quantità (μεγέθει).

Vi troviamo una definizione molto generale dei rapporti e delle uguaglianze di rapporti, valida per ogni grandezza (μέγεθος). La grandezza stessa, tuttavia, non è oggetto di definizione; ammette uno statuto che potremmo avvicinare (nella matematica contemporanea) a quello di insieme.

Troviamo la stessa difficoltà di definizione nella teoria moderna degli insiemi. Così l'inclusione tra insiemi stabilisce un ordine (non totale). Quest'ordine dovrebbe essere definito sulla totalità degli insiemi. Ciò pone il problema di questa totalità e porta necessariamente ad uscire dall'ambito degli insiemi per evitare il paradosso di Russell «dell'insieme» di tutti gli insiemi. Rimanere vaghi riguardo alla grandezza permetteva sia di mantenere il rigore della teoria e il suo carattere operazionale che di conservare la sua gran generalità. Non definire (nel senso abituale) la grandezza, lungi dall'essere una mancanza, era quindi una necessità per il matematico greco. Ciò è molto simile a quanto si trova nella teoria matematica moderna degli insiemi. Per esempio, nel suo classico libricino sulle basi dell'insiemistica, Paul Halmos afferma:

> *«Non tratteremo di una definizione degli insiemi. La situazione è analoga all'approccio assiomatico familiare della geometria elementare. Questo approccio <u>non dà definizioni dei punti e delle linee; descrive invece quello che si può fare con questi oggetti</u>»* ([HAL], p. 1; siamo noi a sottolineare).

La definizione di insieme è rimpiazzata da regole di utilizzazione. Nello stesso modo bisogna capire la nozione di grandezza tramite il suo aspetto operativo. Questo sarà essenzialmente ciò può essere, da una parte <u>moltiplicato</u> da un intero e, d'altra parte, <u>confrontato</u> (ad altre grandezze di stessa natura o genere (μεγετῶν ὁμογενῶν)), secondo le definizioni V.4 e V.5, da cui la loro potenza operativa. Quest'ultima definizione è tanto più importante per noi in quanto Galileo la usa per stabilire la sua propria definizione dell'uguaglianza delle «velocità», più precisamente per poterle quantificare (vedere § III.1).

DEFINIZIONE V.4. – *«Delle grandezze sono dette avere un rapporto l'una relativamente all'altra quando sono capaci, essendo moltiplicate, di sorpassarsi l'un l'altra».*

DEFINIZIONE V.5. – *«Delle grandezze sono dette essere nel medesimo rapporto, una prima relativamente ad una seconda e una terza re-*

lativamente ad una quarta quando degli equimultipli della prima e della terza o simultaneamente sorpassano, o sono simultaneamente uguali o simultaneamente inferiori a degli equimultipli della seconda e della quarta, seconda qualsiasi moltiplicazione, ognuna ad ognuna e prese in modo corrispondente.».

Questo enunciato può essere riscritto in termini moderni nel modo seguente:

Per tutti gli interi (positivi, distinti, non nulli) m e n, abbiamo la seguente equivalenza:

$[E/F = G/H]$ equivale a $[((E/F > n/m) \Leftrightarrow (G/H > n/m))$ e $((E/F = n/m) \Leftrightarrow (G/H = n/m))$ e $((E/F < n/m) \Leftrightarrow (G/H < n/m))]$

L'ultima condizione può essere tolta se, come per la maggior parte dei commentatori, si assume che esista un ordine totale sulle grandezze.

Benché esista in effetti una polemica per sapere se, negli *Elementi*, gli interi possono essere considerati come delle grandezze e se i rapporti di grandezze possono essere trattati come delle grandezze, la maggior parte dei commentatori è d'accordo per vedere in questa teoria la premessa più o meno lontana della teoria moderna dei reali. In quest'ambito, l'equivalenza qui sopra indicata si traduce dicendo che l'insieme dei razionali è (isomorfo ad una parte) denso nell'insieme dei rapporti di grandezze (una grandezza non è necessariamente un numero). Infatti la teoria euclidea delle grandezze va ben oltre, come è mostrato dalla possibilità di trattare gli angoli come delle grandezze ([OFM3], Allegati 7).

Comunque sia, nel libro X, i numeri interi sono trattati come grandezze e questo ha provocato delle importanti polemiche riguardo al rigore delle sue proposizioni (prop. X.1 a X.11). Perchè Euclide trasgredisce qui quanto è considerato come uno degli interdetti del pensiero greco antico, la separazione tra il discreto e il continuo. Tanto è vero, come osserva Leibniz, che per il matematico, non è il caso di ostacolare «*l'arte di inventare per eccesso di scrupoli*» o «*respingere con questo pretesto le scoperte migliori, privandoci dei loro vantaggi*» (Leibniz, *Réponse à Nieuwentift*, [LEI1], V, p. 320-328).

Ma, dal momento che una grandezza non è nient'altro che quello che, da una parte può essere moltiplicato (per degli interi) e, dall'altra essere paragonabile ad altre grandezze della stessa natura, gli interi come le celerità, che secondo i testi aristotelici verificano queste proprietà, possono essere considerati come delle grandezze.

E come già visto, gli angoli negli *Elementi* sono trattati nello stesso tempo come delle qualità, quantità e relazioni, trasgredendo, ancora una volta, la divisione delle categorie aristoteliche.

È quindi difficile affermare che i matematici greci si siano interdetti lo studio del movimento in conformità agli scritti dello Stagirita, scritti che tra l'altro non avevano l'importanza che hanno acquisito dopo nell'epoca medievale (vedi, per esempio, [CR-PE], p. 238). Inoltre non è impossibile conciliare in qualche modo gli «interdetti» aristotelici e una quantificazione del movimento. Infatti le categorie non riguardano tanto la matematica, i cui oggetti non sono altro, per lui, che un'astrazione delle cose, quanto le scienze che si occupano delle cose stesse.

Nel libro VI della *Fisica*, Aristotele usa la celerità per produrre una relazione tra tempo e distanza, dimostrando per esempio la continuità ed anche l'esistenza (in un certo senso) del tempo (*Fisica*, VI, 232b20-233a20).

Per questo riconduce il problema al rapporto tra tempo e celerità di un movimento uniforme e ragiona così: dato che si può trovare un mobile lento quanto si voglia, il tempo deve essere indefinitamente divisibile. Stabilisce così un parallelismo completo, un «isomorfismo», tra tempo e movimento. Se il tempo numera il movimento, il movimento numera il tempo. In termini moderni si parlerebbe di un isomorfismo tra insiemi o di insiemi con la stessa cardinalità o ancora della definizione dei numeri cardinali come classi di insiemi. Aristotele dà come analogo del rapporto tra tempo e movimento quello tra «un numero» e il «numero di cavalli» ([ARI], IV, 220b14-20). Come visto nel paragrafo precedente questo rendere numerico il tempo e il movimento è incompatibile con una separazione assoluta tra discreto e continuo. Ritroviamo la situazione del libro X degli *Elementi*.

Attenendoci ai testi che ci sono pervenuti, queste testimonianze ci sembrano mostrare che la concezione quantitativa del movimento si iscrive in modo coerente nell'ambito del corpus scientifico dell'Antica Grecia, da Platone a Euclide, ed è in accordo con una interpretazione operativa della grandezza in matematica. Non escludendo di trattare la celerità come una grandezza, Aristotele rimaneva nell'ambito delle scienze greche.

A questo punto sorge una domanda. Se il problema per i matematici e Aristotele stesso non era l'appartenenza della celerità alla qualità, come capire l'assenza di una teoria matematica del movimento nell'Antica Grecia?

Ci sembra che la difficoltà si trovi non nell'alternativa quantità/qualità, ma nella necessità di definire un campione per misurare la velocità. Innanzi tutto, non è facile ottenere un movimento sempre identico che serva di norma come per le lunghezze (riga), il peso o persino il tempo (orologio ad acqua, clessidra, polso). Ma inoltre, ed è il problema più insolubile, vi è un'infinità di movimenti tutti diversi, sia per traiettoria che per velocità. L'ostacolo ad ogni studio quantitativo stava quindi nella molteplicità delle velocità di uno stesso mobile (dal momento che la celerità non è uniforme) e nel loro carattere infinitesimale. Infatti una definizione formale è possibile, in un modo o nell'altro, solo in forma infinitesimale. Gli altri concetti si riconducono a quello di velocità media. La velocità media riduce tutti i movimenti al movimento uniforme che non è altro che una coppia costituita da una distanza (quella percorsa dal mobile) e da un tempo (la durata del movimento) (vedere § III.3). In tale ambito, l'interesse di una dinamica sembra molto limitato.

Tuttavia, contrariamente a quanto pensiamo noi moderni, il movimento per Aristotele é soltanto una parte di una concezione filosofica, il cui obbiettivo è di rendere conto della totalità dell'universo, nel senso greco di ordine universale (il «cosmos» ([2])). L'errore sarebbe quindi di concepirlo in un senso contemporaneo ereditato dalla fisica classica. Questo non toglie che, anche per noi, la celerità abbia un doppio senso (§ I.3). Uno è qualitativo, l'altro quantitativo, il che aumenta l'ambiguità di questa nozione e rende ancora più difficile capire il suo senso passato. La teoria del movimento, elaborata da Aristotele, doveva

([2]) È da questo punto di vista che Geymonat concepisce la disfatta di quello che chiama «il programma di politica culturale di Galileo» ([GEY], p. 78). La condanna di Galileo da parte della Chiesa è l'esito di una lotta interna tra aristotelici e modernisti (*ib.*, p. 113-114).

permettere di evitare i paradossi, simili a quelli di Zenone. Così, considerare la celerità come una qualità e non una quantità, giustificava la possibilità che il movimento fosse l'oggetto di studio della Fisica, rigettando i paradossi sull'infinito («Achille e la tartaruga», «la freccia»...). Si capisce allora come le difficoltà inerenti a questo studio, indotte dall'assenza di una unità di movimento, possano avere impedito la sua matematizzazione, piuttosto che l'inverso.

È proprio ottenendo questa unità che la fisica galileiana permetterà di elaborare una teoria matematica del movimento. Si può quindi ben dire che il problema del movimento è quello della sua eterogeneità. Ma non matematica (dividere dei termini eterogenei) ma di senso; il concetto di celerità essendo di per sé eterogeneo.

II. La questione del movimento fino a Galileo.

Come era lecito aspettarsi (vedi [OFM2], § III.1), due scuole si affrontano riguardo alla nascita di questa nuova fisica.

1. *L'interpretazione «catastrofica».*

Per semplificare, non ci sarebbe stato, per così dire, alcun vero progresso dalla tarda Antichità (datata intorno al -200 i.e. Archimede) al Rinascimento europeo (vedi per esempio [WHI], p. 17, 22-23).

Strettamente parlando, questo è evidentemente inesatto, anche se ci limitiamo alla matematica, molti lavori essendo stati fatti nel Medio Evo. Così come quelli che portano allo sviluppo dell'algebra, o ancora quelli degli scienziati di Oxford e Parigi, sulle successioni infinite e le superficie (vedere § II.2). Ed è ben prima della nascita dello scienziato italiano che vengono introdotti gli strani «immaginari» (i.e. i numeri complessi) per risolvere alcune equazioni polinomiali. Tuttavia non si vede alcun cambiamento violento, quello che si potrebbe chiamare una rivoluzione intellettuale. Per quanto riguarda la geometria, i testi di base rimangono quelli di Euclide, spesso mal tradotti e capiti male.

Si potrebbe pensare che cercare la soluzione di un problema in un «genio» è una soluzione di comodo. Tuttavia, questa interpretazione, come tutte quelle che possono essere qualificate «catastrofiche», ha un carattere relativo. In quest'ambito interpretativo, la «scomparsa» dei dinosauri si è scaglionata su varie decine di migliaia di anni (vedere [OFM3], Allegati 1). Nello stesso modo, Galileo elabora la sua nuova scienza del movimento nel tempo e in relazione con i lavori degli altri matematici e sperimentatori. Basta per questo considerare l'evoluzione delle sue idee sull'argomento e anche l'importanza della sua corrispondenza. Lo stesso dicasi per l'interesse che dimostra per le scoperte tecniche.

Ne troviamo un esempio nel cannocchiale astronomico che gli permetterà di compiere delle scoperte cosmologiche così importanti. È tramite questa scoperta che raggiungerà uno statuto eccezionale e un prestigio che gli daranno una grande libertà di manovra. Tuttavia l'utilizzo di lenti correttive è già antico visto che ne troviamo un esempio su una illustrazione della fine del XVesimo secolo, *Navata dei Pazzi* di Sebastian Brant (1494) (NY Academy of Medicine).

Quanto all'invenzione del cannocchiale astronomico, verso il 1608, è attribuita ad un ottico olandese, Hans Lippershey. Ed è tramite altri scienziati che Galileo ne ebbe conoscenza, cosa che gli permise di costruirne lui stesso.

I commentatori divergono sull'interpretazione dell'opera di Galileo, spesso a seconda della valutazione che ne fanno e al posto che gli attribuiscono nella scienza. Alcuni, come A. Koyré, privilegiano il suo platonismo e il suo metodo teorico, altri come L. Geymonat insistono al contrario sui suoi esperimenti, cioè sul suo empirismo sperimentale. Quello che importa qui, tuttavia, è lo studio del movimento che si sviluppa a quell'epoca e che condurrà ad una elaborazione della meccanica e degli infinitesimali.

Non è quindi l'originalità dei lavori galileiani, rispetto ai suoi contemporanei o ai suoi vicini predecessori, che ci interessa qui, ma il loro impatto, in quanto sfociano su una nuova concezione della fisica. Il nostro proposito infatti non è di aggiungere un nome alla lista già lunga dei proto-scopritori del calcolo infinitesimale, ma di mostrare come il lavoro di Galileo ne sia stato alla base.

È in questo senso, e non attraverso la problematica del genio in storia/scienza, che comprendiamo l'interpretazione «catastrofica».

2. *Il punto di vista «evoluzionista» e la questione dell'infinito.*

Per gli Scolastici, la separazione o la non separazione delle categorie della qualità e della quantità poneva un problema «filosofico» fondamentale. Ma nulla dimostra che fosse così nell'antichità greca. Platone, analizzando i grandi sistemi politici, in quello che gli interpreti moderni considerano spesso come uno scherzo, non esita a quantificare il rapporto di felicità tra il re/filosofo e il tiranno, rapporto precisamente uguale a $(3^2)^3 = 729 \approx 2 \times 365$ (un giorno felice dell'uno equivale approssimativamente a due anni dell'altro, e si capisce che la vita di quest'ultimo valga appena quella di un neonato) (*Repubblica*, IX, 587d-588a).

Secondo San Tommaso d'Aquino, il più o meno di qualità si spiega con un processo di aumento/diminuzione di partecipazione a questa qualità, per Durant de Saint-Pourçain (tredicesimo secolo) questo passa per l'accesso a vari gradi di perfezione (diventare più caldo significa essere più perfetto rispetto al calore).

Per Duns Scot e la sua scuola di Scotisti (inizio quattordicesimo secolo), questa variazione di qualità è causata dall'addizione/sottrazione di vari gradi (di qualità) che si addizionano come delle goccioline d'acqua. Un movimento può allora assumere successivamente dei gradi di celerità (sempre una qualità) variabili ed è allettante capire il loro aumento o la loro diminuzione come una specie di accelerazione/decelerazione. Questo concetto è adottato da Gugliemo d'Ockham o Occam (soprannominato il Doctor Invicibilis, arrestato e poi scomunicato dal Papa Giovanni XXII) poi dalla maggior parte dei «filosofi» scolastici.

Più o meno verso la stessa epoca, i fisici di Oxford e di Parigi studiavano questi medesimi problemi in relazione con l'infinito matematico, in particolare attraverso le serie matematiche, e li applicavano allo studio della celerità.

Il movimento di un mobile era allora classificato a seconda della sua «uniformità» o «difformità». Si dice che un movimento è uniforme (rispettivamente difforme) se la sua celerità è sempre la stessa (rispettivamente varia nel tempo). Questo può essere applicato alla variazione stessa. Se questa variazione è sempre la stessa, il movimento è detto allora uniformemente difforme e difformemente difforme nel caso contrario. Questo ragionamento può essere reiterato quanto si voglia. Non è difficile vedere qui, in germe, la nozione di accelerazione e, da ciò, assimilare il movimento «uniformemente difforme» al nostro movimento «uniformemente accelerato» e così via.

Nicola Oresme, un famoso «Parigino» del quattordicesimo secolo, usava pure delle tecniche che richiamano per noi quelle del calcolo infinitesimale, persino delle coordinate cartesiane, per calcolare la «celerità globale». Questa forma di rappresentazione risale al «metodo degli indivisibili», già utilizzato, secondo Archimede, da Democrite. Il Siracusano lo usava a sua volta per calcolare alcune superficie limitate da una parabola. Sembra quindi che questo metodo fosse ben noto ai matematici dell'antichità. Pare tuttavia che sia stato considerato con un certo sospetto perché supponeva l'esistenza permanente di un resto.

L'attitudine degli «Oxfordiani» e dei «Parigini» sembra più rilassata, per quanto riguardava solo la matematica, e usavano questi calcoli molto più frequentemente. Se ne potrebbe dedurre che gli ostacoli principali (quantificazione e utilizzo di un'infinità d'istanti) per definire il concetto di velocità (nel senso della fisica moderna) erano state più o meno risolte dai matematici, ben prima di Galileo.

Purtroppo, questo non è altro che una ricostruzione intellettuale. Basti richiamare le difficoltà nel precisare il senso dei termini legati al movimento, quali l'*impetus* o i gradi di velocità (vedere III.1.γ). Questo rimane vero anche dopo Galileo, così in Cartesio o nello stesso Leibniz, la distinzione non è chiara, tra quanto chiameremmo, oggigiorno, lavoro, energia o forza, e nemmeno lo è quella tra velocità e accelerazione. Usando senza precauzioni dei termini che hanno acquisito la loro precisione solo dopo un lavoro lento e considerevole, si cancella tutto un lembo della fisica.

Se i matematici pensavano di avere il diritto di usare degli artifizi (come gli indivisibili), è perché studiavano precisamente degli oggetti matematici (e non fisici). Questo era già vero nell'antica Grecia e spiega forse l'estrema difficoltà dello statuto dell'infinito nel mondo finito di Aristotele (*Fisica*, III, 5-8; VI, 2; VI, 9; VIII, 8; *Del Cielo*, 299a11-17; *Metafisica*, 1071b19; e anche § I.3′). Ed era ancora vero nel Rinascimento come lo mostra l'impiego degli «immaginari». Inoltre questa situazione presentava un vantaggio per la tranquillità dei matematici. Tanto che il cardinale Bellarmino la garantiva a Galileo e a tutti i copernicani che si limitavano all'ambito matematico (lettera a Paolo Foscarini, XII, p. 171), e conosciamo i grattacapi che Galileo ha dovuto subire per avere rifiutato tale limitazione.

Il concetto matematico di «celerità globale» non era collegata ad un mobile fisico, ancora meno alla distanza percorsa. Per esempio, in un ambito matematico, poco importa se si considera la celerità come dipendente dal tempo, dalla distanza o dalle fasi della luna (vedere in particolare III.1.δ). Ma questo sarà proprio uno dei problemi cruciali da risolvere per creare una scienza del movimento. Il miglior argomento, *a contrario*, è probabilmente, il lungo termine, tre secoli, tra le opere di un Oresme per esempio e i concetti relativi al calcolo infinitesimale. Come osserva Koyré si trattava, niente di meno, che di «riformare la struttura della nostra intelligenza» ([KOY], p. 171).

III. Galileo e il concetto di velocità.

1. *Continuità e movimento.*

La fisica galileiana si fonda su due concetti fondamentali.

> *Il primo afferma che tutto quello che ha luogo nella natura è un'approssimazione di una certa realtà (o se si preferisce, di una teoria) matematica, perché la natura è scritta matematicamente.*
>
> *Il secondo, conseguenza del primo, è la natura continua della realtà.*

La matematizzazione della natura, fondamento della scienza galileiana, è ribadita più volte e la si trova già nel *Sidereus Nuncius*. Il principio di continuità, in quanto **usato** solo nelle dimostrazioni, non è formulato in modo esplicito.

Il primo principio è più ampio, e in un certo senso è filosofico, poichè Galileo si appoggia su Platone. Il secondo permette una rottura con le concezioni *peripatetiche* (i.e. dell'aristotelismo scolastico). Questa rottura si esprime maggiormente attraverso la continuità della (o nella) natura, che della sua quantificazione (vedere § I.3).

Secondo Aristotele, c'è, in generale, proporzionalità tra la forza motrice e il suo effetto (il movimento). Invece questa proporzionalità viene a mancare se si considerano forze abbastanza piccole. Così una forza può muovere un corpo, mentre una più piccola ne sarà incapace. Un naviglio non può essere trainato che da un certo numero minimo di trainanti, mentre un unico uomo non potrebbe neanche smuoverlo ([ARI], VII, 249b20-250a24). Riconosciamo, in termini moderni, l'esempio di una discontinuità di una funzione caratteristica.

Questo aspetto instabile della natura aristotelica non aspetta il fisico pisano per essere denunciato. Così Plutarco, tendente alle tesi di Platone, mentre rende conto dei formidabili macchinari inventati da Archimede, tradizionalmente considerato come un platonico, prende precisamente come esempio un'enorme nave che lo scienziato siracusano riesce, da solo, a muovere a piacere ([PLU], Vita di Marcellus, 22). In questo modo contesta sia una tesi universalmente ammessa che una tesi di Aristotele, quella della discontinuità della causa e dell'effetto. Nel richiamarsi ad Archimede, Galileo afferma non solo la natura matematica del mondo, ma soprattutto la sua continuità.

Koyré accredita, a torto ci sembra ([3]), Cartesio, e non Galileo, come il vero autore del principio d'inerzia (cioè «*se nessuna forza esterna è applicata ad un corpo, quest'ultimo o si trova in riposo o è animato da un movimento rettilineo uniforme*»). Sia quel che sia, Cartesio ritiene questo principio come vero. Invece quando lo scienziato francese formula le sue leggi sull'urto di corpi in movimento, nessuna è conforme al principio di continuità (vedere Allegato). Come affermerà Huygens, stabilendo le leggi degli urti (elastici) della meccanica classica, esse sono praticamente tutte sbagliate. E per Leibniz, sono sbagliate precisamente perché infrangono il principio di continuità (vedere [LEI1], VI, p. 131, 249). Molto paradossalmente, Cartesio, questo nemico giurato della filosofia aristotelica, rimane certamente più aristotelico di Galileo.

([3]) Tanto più che riduce, citando Pascal, gli enunciati di Galileo sull'inerzia a «due righe [scritte] per caso, senza una riflessione più lunga ed estesa» ([KOY3], p. 162)

Nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, il principio di inerzia è dato sotto la forma della permanenza del movimento uniforme di un corpo che si muove su un piano orizzontale. La dimostrazione si basa su una successione di lemmi di continuità, quello che si chiama il teorema dei valori intermedi: una funzione numerica continua che prende due valori distinti (diciamo a e b) in due punti distinti (x e y), prende tutti i valori intermedi (tra a e b) tra questi due punti (x e y). In termini moderni questo si esprime dicendo che l'immagine di un insieme connesso è connessa. Il principio di inerzia appare d'altronde come un risultato intermedio in un ragionamento sulla continuità dei gradi di velocità, dal riposo al movimento.

La dimostrazione viene fatta in più passaggi che riassumiamo.

α) Definizione dell'uguaglianza della rapidità.

Salviati rigetta la nozione usuale (e aristotelica) nella quale si paragona la rapidità di due movimenti fissando sia la distanza sia il tempo, a beneficio di una definizione «più universale», dipendente contemporaneamente dalle distanze e dai tempi. Così «chiamarsi ancora le velocità esser uguali, quando gli spazi passati hanno la medesima proporzione che i tempi ne' quali son passati, e sarà definizione più universale» ([GAL], VII, p. 48). La portata di questa nuova <u>definizione</u> (già enunciata da Archimede nel suo *Trattato sulle spirali*, ma sotto forma di proposizione) è notevole, ma per mancanza di spazio rimandiamo il lettore interessato a [OFM3]. È essa infatti che permette di considerare la rapidità come una grandezza. Non si potrà certo paragonare movimenti qualunque, alcuni essendo, in certi momenti, più rapidi, in altri momenti più lenti. Ma questo significa che se due movimenti sono paragonabili, allora il paragone si potrà fare considerando tempi piccoli quanto si voglia. La rapidità diventa così una proprietà *localizzabile*.

Questa definizione diventa una proposizione nei *Discorsi*, che si appoggia su quattro assiomi ([GAL], VIII, p. 192-193) e sull'enunciato V.5 degli *Elementi* di Euclide (vedere § I.3′). L'importanza di questa definizione V.5 è tale, agli occhi di Galileo, che le dedicherà un po' di tempo prima della sua morte in un lavoro chiamato ulteriormente «la quinta giornata» ([4]).

β) Il paradosso della continuità dei gradi di velocità.

Si esprime nello stupore di Sagredo: «tuttavia mi par gran cosa che quella palla d'artiglieria, che pur si vede scendere con tanto precipizio che in manco di dieci battute di polso passerà più di dugento braccia di altezza, si sia nel suo moto trovata congiunta con sì picciol grado di velocità, che, se avesse continuato di muoversi con quello senza più accelerarsi, non l'averebbe passata in tutto un giorno». E, aggiunge subito Salviati «in tutto un anno, né in dieci anni, né in mille» ([GAL], VII, p. 46).

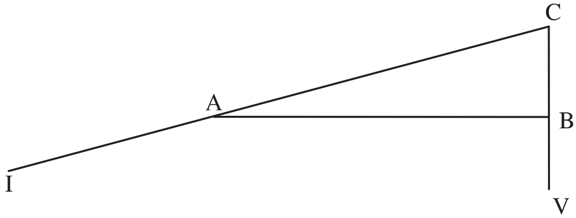
γ) Il significato dei gradi di velocità e di lentezza.

Come l'*impetus* di cui è certe volte sinonimo per Galileo, e che possiamo al meglio descrivere come «una specie di» (vedere [KOY3], p. 49), il grado di velocità è una nozione vaga che prova a quantificare la celerità per confronto con un altro movimento. Si possono quindi considerare solo valori interi, da cui un'aritmetica del movimento. Per quanto riguarda i gradi di lentezza, che hanno una parte importante nella dimostrazione, sono dei compagni dei precedenti, in qualche modo gli inversi dei gradi di velocità. La difficoltà nei *Discorsi*, è l'utilizzo da parte di Galileo di queste nozioni tradizionalmente aritmetiche per esporre la sua concezione di velocità. Da qui una certa ambiguità, tra questa nuova interpretazione difesa da Salviati e quella più familiare dei suoi interlocutori. Si traduce per esempio nell'incredulità di Sagredo (vedere β).

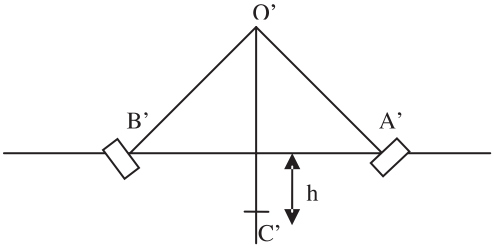
([4]) La redazione è di Torricelli, da un dettato di Galileo cieco, sorgono quindi problemi importanti per sapere in quale misura il testo rappresenta fedelmente il pensiero di Galileo. Se ne troverà una versione (in italiano) con diverse varianti in [GIU] e una traduzione inglese in [DRA]. Inoltre Enrico Giusti, nell'opera precedentemente citata, presenta uno studio dettagliato della ricostruzione del libro V da parte della scuola galileiana.

δ) La proprietà fondamentale.

Accettata senza nessuna difficoltà, afferma che la velocità acquisita da un corpo è indipendente dalla sua traiettoria e dipende solo dall'altezza della caduta. E questo è altrettanto vero per i piani inclinati,



che per i pendoli.



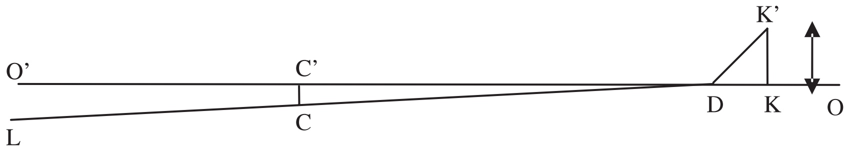
Questa proprietà, secondo Sagredo, è una conseguenza evidente del fatto che la celerità è funzione della distanza dal centro della terra al quale il corpo si avvicina durante la sua caduta.

ε) La doppia continuità.

i) Un lungo ragionamento utilizza a questo punto la continuità del movimento lungo piani inclinati. Da una parte questo movimento dipende, in modo continuo, dall'angolo di inclinazione, dall'orizzontale alla verticale, dall'altra, dalla distanza dal punto di partenza.

Applicando la proprietà fondamentale δ), e considerando piani vicini quanto si voglia all'orizzontale, Galileo ne deduce che il mobile deve passare per ogni grado di lentezza grande quanto si voglia, il grado di lentezza infinito corrispondendo al riposo. Il mobile deve quindi inversamente passare per ogni grado di velocità piccolo quanto si voglia, partendo da zero, grado di velocità al riposo (ragionamento che sarà ripreso da Leibniz per stabilire la sua «Legge di continuità» nei *Nuovi saggi* ([LEI2], Prefazione)). L'importanza di questo punto apparirà in ii) qui sotto. Se Sagredo è d'accordo, Simplicio invece dissente e richiede una dimostrazione qualitativa.

ii) Sempre sotto l'ipotesi «*secondo il corso ordinario di natura, (...) rimossi tutti gl'impedimenti esterni ed accidentarii*», la proprietà fondamentale implica il principio d' inerzia nel senso che «*sì che nel piano orizzontale qual si sia velocità non s'acquisterà naturalmente mai, avvenga che il mobile già mai non vi si muoverà*», ma «*acquistato che è si sia, si continuerà egli perpetuamente con velocità uniforme*» ([GAL], VII, p. 52-53). La dimostrazione è la seguente. Da i), il movimento lungo un piano inclinato qualsiasi (ma non orizzontale) prende ogni grado di velocità. Possiamo quindi considerare che, per ogni corpo in movimento, questo sia stato acquisito, dal riposo, per discesa lungo un certo piano K′D, eventualmente verticale (vedere figura qui sotto).



Sia C′ un punto arbitrario dell'orizzontale OO′. Si può scegliere il piano DL d' inclinazione così piccola di modo che il punto C, proiezione verticale di C′ su DL, sia molto piccolo. Secondo la proprietà fondamentale, la differenza di rapidità in C rispetto a C′ è misurata dalla distanza CC′. Infatti l'altezza di caduta in C è uguale a K′K+C′C. Visto che C′C è piccolo quanto si voglia, la celerità del movimento in C è molto vicina a quella in C′ la quale è superiore a quella in D. Poiché è vero per ogni punto C′ di OO′ (la scelta del piano DL dipende tuttavia dal punto C′ su OO′), il movimento continua indefinitamente sull'orizzontale e, visto che C′C è molto piccolo, questo movimento è uniforme.

La dimostrazione mette in evidenza le difficoltà da sormontare per arrivare ad una nozione fisica che permetta di quantificare la celerità in quanto oggetto fisico. Così Sagredo confonde la velocità media e la rapidità istantanea, ed è per farlo ricredere che Salviati fa questa digressione sul movimento lungo piani inclinati. La confusione di Sagredo ha origine in una concezione aritmetica dei gradi di velocità: per un movimento partendo dal riposo, deve esistere un più piccolo grado di velocità, soprattutto se il movimento è molto rapido. Ripetiamolo, è un concetto estremamente vago, elaborato per rendere conto numericamente di una qualità (movimento più o meno rapido o lento). È precisamente la continuità della celerità che permetterà la matematizzazione, eliminando le complicazioni che si erano accumulate (il «pantano» (*quagmire*) di cui parla Russell) (5).

Se si decide di identificare grado di velocità e velocità (istantanea), il ragionamento sembra arcaico, difficilmente comprensibile e soprattutto inutile. Invece l'importanza del testo risiede nel passaggio da una concezione aritmetica della rapidità (concepita qualitativamente e misurata dai gradi) ad una concezione continua (concepita come grandezza). È solo dopo questa lezione che una tale identificazione può essere presa in considerazione. Finalmente, il testo manifesta un trattamento quasi infinitesimale del problema, che segue dalla continuità generale dei fenomeni, ivi compreso quando si tende a zero (i.e. al riposo nel caso del movimento).

2. *La nozione di velocità o che cosa è la velocità.*

In questa parte del *Dialogo*, la continuità permette di aggirare l'assenza di velocità (istantanea). La complessità della dimostrazione proviene dai necessari andirivieni tra i vari significati ricoperti dalla rapidità, significati che i gradi di velocità tentano di quantificare. Infatti questi hanno un senso in ogni punto del movimento, mentre la velocità media ha senso solo per parti finite del movimento. Dalla continuità derivano due conseguenze fondamentali che, per Galileo, sono solo due aspetti di una stessa idea.

Dal punto di vista fisico, permette di confrontare teoria e sperimentazione, questa potendo essere considerata come conseguenza di quella. Anche se i dati non corrispondono esattamente, basta che siano abbastanza vicini. Questa è la grande innovazione che Galileo usa senza tregua e che firma, forse al meglio, la nascita di una fisica matematica:

(5) Un'altra difficoltà sulla quale insiste Galileo è quanto si chiamerebbe oggi il carattere continuo ma non uniformemente continuo della velocità (vedere [GAL], VII, p. 47-51).

l'approssimazione. Infatti, anche se la natura fosse scritta in termini matematici, rimarrebbe comunque indecifrabile in un universo che non fosse matematico. Si avrebbero allora due mondi disgiunti, seguendo lo stesso ragionamento di Parmenide, riguardo al mondo delle Idee e al mondo sensibile ([PLA2], 133b-134c, 134c-135a).

Se è possibile studiare la caduta dei corpi, è perché, benché il mezzo ambiente sia aereo, il disaccordo tra i fatti e quanto prevede la teoria dipende in modo continuo dalla resistenza che il mezzo oppone ai corpi, resistenza che è nulla nel vuoto. Il risultato sarà quindi vero, dal momento che ci si metta in condizioni sufficientemente vicine a quelle del vuoto, cioè considerando solo corpi per i quali la resistenza dell'aria è sufficientemente debole ([GAL], VIII, p. 118-119), e accettando anche un piccolo margine d'errore. La prova non si trova nell'esattezza del risultato previsto dalla teoria, ma nel rapporto delle predizioni tra la teoria di Galileo e quella di Aristotele (vedere [GAL], VIII, p. 120). Così Galileo può affermare simultaneamente che l'impatto di due corpi di peso diverso lasciati cadere da una certa altezza non è concomitante, e che i due corpi arrivano nello stesso istante.

> «*Io non vorrei, Sig. Simplicio, che voi faceste come molt'altri fanno, che, divertendo il discorso dal principale intento, vi attaccaste a un mio detto che mancasse dal vero quant'è un capello, e che sotto questo capello voleste nasconder un difetto d'un altro, grande come una gomena da nave. Aristotele dice: «una palla di ferro di cento libbre, cadendo dall'altezza di cento braccia, arriva in terra prima che una di una libbra sia scesa un sol braccio»; io dico ch'ell'arrivano nell'istesso tempo*» ([GAL], VIII, p. 109).

È la continuità che dimostra allo stesso tempo sia l'esattezza della sua teoria che l'errore d'Aristotele. Senza la continuità entrambe le teorie sarebbero false, ma una (molto) meno dell'altra.

Da un punto di vista meta-fisico (nel senso di meta-matematica, ma anche filosofico), essa permette un doppio ripensamento del pensiero peripatetico. Da una parte, mostrando l'impossibilità di fidarsi imprudentemente dell'evidenza. Dall'altra, non solo scoprendo gli errori di una teoria il cui unico obbiettivo è di rendere conto dell'esperienza sensibile, ma anche, e per Galileo è la cosa più importante, spiegando le cause di questi errori.

È solo dopo numerosi anni di studio e di sperimentazioni, che Galileo stabilì una legge (matematica, fisica?) collegando la distanza percorsa da un mobile in caduta libera e il tempo percorso. Prima, era giunto, contro le tesi aristoteliche, alla composizione dei vari movimenti (naturali e violenti) e soprattutto all'eternità del movimento (rettilineo) uniforme (vedere paragrafo precedente).

La semplicità dei mezzi usati in questi esperimenti può sorprendere: piani inclinati e pendoli ([GAL], VII, p. 44-45; VIII, p. 126-129). Galileo sottolinea l'importanza dei pendoli e anche l'originalità del loro studio (almeno rispetto ai «filosofi peripatetici») (ib., VIII, p. 139). Eppure Galileo fa dire a Sagredo che la semplicità stessa di questi esperimenti potrebbe essere motivo di scherno nei suoi confronti (ib., VIII, p. 131; VIII, p. 140).

Inoltre i concetti matematici usati non sono certo più specializzati e sicuramente non più avanzati, di quelli degli *Elementi* di Euclide.

Una volta capito il fenomeno dei pendoli (come **una** forma della caduta di un corpo), il suo utilizzo diventava una necessità per minimizzare la frizione:

> «*...e passando più avanti, ho anco voluto liberarmi da qualche impedimento che potesse nascer dal contatto di essi mobili su 'l detto piano declive: e finalmente ho preso due palle, una di piombo ed una di sughero, (...) e ciascheduna di loro ho attaccata a due sottili spaghetti eguali (...); allontanata poi l'una e l'altra palla dallo stato perpendicolare*» (ib., VIII, p. 128).

La simmetria del movimento del pendolo, allo stesso tempo, esprimeva ed era interpretata dall'eternità del movimento, sebbene si trattasse di un movimento non uniforme (ib., VIII, p. 129, 138; e anche paragrafo precedente).

Ma, risultato complementare, Galileo otteneva una nuova legge, una specie di «equivalenza» tra l'altezza di caduta di un corpo e la sua velocità. La velocità di un corpo che cade da una determinata altezza è indipendente dal corpo (dalla sua forma, dal suo peso, ...) e dalla traiettoria (caduta libera, piano inclinato o traiettoria circolare di un pendolo) (ib., VIII, p. 128; e anche 1.δ).

Questa legge, che abbiamo chiamata la proprietà fondamentale (della caduta dei corpi) non è celebrata quanto altri lavori di Galileo, in particolare quelli riguardanti l'astronomia e il sistema copernicano. Tant'è che Geymonat vede nell'invenzione «del suo famoso cannocchiale (...) l'origine della fase più gloriosa della sua attività scientifica» ([GEY], p. 44). Già quando Galileo era ancora vivo, gli editori dei *Discorsi*, Luigi ed Abramo Elzévir, per vantare i meriti di Galileo, porgevano l'accento sulle sue scoperte fatte «grazie al cannocchiale astronomico» ([GAL], VIII, p. 48). Questa legge è però un ingrediente cruciale per elaborare il concetto di velocità e, di conseguenza, il calcolo infinitesimale. Già L. Brunschvig sottolineava, è vero, da un punto di vista diverso, l'importanza dei lavori di Galileo nella «scoperta» del calcolo infinitesimale e soprattutto integrale ([BRU], 10, p. 215-6).

Naturalmente è possibile dare a quanto abbiamo chiamato «celerità» il senso di velocità media, già presente in Aristotele (vedere § I.3′). Ma, come vedremo in seguito, servirsi di questa interpretazione, per salvare quanto può esserlo della fisica aristotelica del movimento, è estremamente ingannevole.

Se ci riferiamo alla «celerità», il problema fondamentale era, secondo la nostra analisi, la mancanza di unità di misura (vedere § I.3′). Ma era anche, in un altro senso, la mancanza di unità per impossibilità di darle un senso unico globale. ([6])

Da questo punto di vista, gli scolastici non hanno portato alcun cambiamento. Malgrado i risultati importanti ottenuti dall'introduzione dei vari movimenti uniforme, uniformemente difforme, uniformemente difformemente difforme..., rimaneva da caratterizzare un movimento come appartenente all'una o all'altra di queste classi. Così, nella classificazione di Nicola Oresme, la quale per alcuni prefigura i lavori di Galileo (vedere § II.2), i vari casi erano disgiunti gli uni dagli altri, ognuno chiedendo uno studio specifico, da cui l'impossibilità di definire **la** velocità.

Infatti una tale definizione quantitativa (o matematica, o fisica), per essere indipendente dal movimento, deve essere presa nel senso di <u>velocità istantanea</u>. È per questo motivo che il problema della velocità

([6]) Non è altro che la questione di Socrate nel Teeteto, o, secondo la riformulazione da parte di Teeteto, la difficoltà di «annoverare [una moltitudine] in un'unità» (147d).

non era mai fisico, ma matematico. Ed è anche per questo che abbiamo preferito usare il termine «celerità» e non «velocità» fin tanto che una tale definizione era propriamente impossibile, quando pure la distinzione qualità/quantità andava diminuendo nel Medio Evo, ammesso che abbia mai veramente avuto una grande importanza nell'antica Grecia (vedere cap. I).

Rimane da capire perché, con i lavori di Galileo, questa nozione aveva senso e anche in quale misura la proprietà fondamentale della caduta dei corpi (vedere 1.δ) modificava radicalmente la concezione anteriore del movimento.

La risposta è straordinariamente semplice: questa proprietà fondamentale permetteva di **calcolare** la velocità (istantanea).

Infatti, la continuità dei gradi di velocità, concepiti da Galileo, contro la tradizione, come delle grandezze, implica che ogni movimento istantaneo si riconduca ad una caduta verticale seguita da un movimento uniforme. Analogamente anche per il movimento dei pianeti, e lo scienziato italiano è così sicuro dell'esattezza di questa teoria, che afferma di potere invertire il calcolo: dalla conoscenza precisa del loro movimento di rotazione, si può ottenere l'altezza della loro caduta.

> *«Figuriamoci, tra i decreti del divino Architetto (...) avere stabilito il centro delle lor conversioni ed in esso collocato il Sole immobile (...) si cerca in quale altezza e lontananza dal Sole era il luogo dove primamente furono essi globi creati (...) Per fare questa investigazione bisogna pigliare da i più periti astronomi le grandezze de i cerchi ne i quali i pianeti si rivolgono, e parimente i tempi delle loro revoluzioni.»* ([GAL], VII, p. 53).

Possiamo considerare questo come «una favola platonica» della creazione del mondo. Però, è così che Newton ragionerà per ottenere il movimento dei pianeti intorno al sole ([7]).

A questo punto, e quali che siano il movimento e la traiettoria, uniforme o difforme, rettilinea o circolare, per ottenere il grado di velocità v di un mobile al tempo t, basta calcolare l'altezza H che questo

([7]) Tuttavia, a differenza di Galileo, non assumerà che il movimento sia necessariamente circolare, ma mostrerà, precisamente con questo ragionamento, che deve essere ellittico.

mobile è capace di raggiungere. Oppure, inversamente, conoscendo i suoi «gradi di velocità», è possibile dedurne l'altezza H, anche nel caso dei pianeti.

Dalle equazioni date da Galileo per un movimento di caduta libera, seguono immediatamente le seguenti conseguenze. Il grado di velocità del mobile al tempo t gli permetterebbe, questa velocità rimanendo costante, di percorrere una distanza uguale a 2 volte quella che ha percorso dallo stato di riposo. Si ottiene questo risultato con una specie di integrazione, come nell'esempio del § II.2 (vedere [GAL], VII, p. 52, e VIII, p. 243, scolio del problema 9).

Si avrà quindi:

$2H = vt$ (*)

E secondo la legge della distanza dipendente dal quadrato del tempo (le costanti possono sempre essere supposte uguali a 1) si ha:

$$H = t^2$$

da (*) si deduce:

(1) $$v^2 = 4H$$

o ancora

(1′) $$H = v^2/4$$

Questi risultati, veri *a priori* unicamente per la caduta libera, sono (secondo 1.ε.i) universalmente veri. Infatti, i gradi di velocità permettono di misurare qualsiasi movimento (cioè di misurarne la rapidità) ad un tempo dato. Dal momento che i gradi di velocità sono concepiti come grandezze continue, quello di un movimento qualsiasi, ad un istante dato, si riconduce al grado di velocità, ad un istante dato, di un movimento in caduta libera. In altri termini, la misurazione della rapidità di un movimento è indipendente dalla natura di questo movimento. È l'equazione (1).

Secondo questa equazione, la grandezza v è determinata dalla radice quadrata dell'altezza H. In altri termini, l'altezza fornisce un campione (un'unità) universale per calcolare i «gradi di velocità», cioè la velocità (perché definita per ogni tempo, ogni movimento ed ogni traiettoria).

Per quanto sorprendente possa apparire risulta che si poteva ottenere e misurare la velocità (istantanea) prima ancora di averla definita.

Se l'equazione (1) unifica il movimento, rendendo possibile una misurazione universale della velocità (indipendente dal movimento), l'uguaglianza (1′), unificando le «forze» (nel senso vago che troviamo ancora in Galileo) dovute alla velocità e alla posizione, permette di ottenere una definizione universale di quanto chiamiamo adesso energia. Questa equazione esprime essenzialmente la conservazione dell'energia (8), i.e. della somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica (9). Si potrebbe obbiettare che le masse non compaiono. Ma questo è dovuto al fatto che qui si studia il movimento di un unico corpo, di massa costante, che si può supporre uguale all'unità.

Queste equazioni sono alla base di quello che si chiamerà la disputa delle «forze vive». La polemica riguardava che cosa veniva conservato nel movimento ed opponeva cartesiani e leibniziani. Per i primi era la velocità (come grandezza), per i secondi, il suo quadrato; i leibniziani erano allora dalla parte di Galileo. Questa volta ancora, Cartesio è più vicino ai peripatetici, o più lontano dalla fisica moderna di quanto lo fosse Galileo (10).

3. *Velocità ed infinitesimali.*

Così, è dalla fisica di Galileo (e solo a partire da essa) che il calcolo della velocità (istantanea) diventa possibile. E questo significava simultaneamente la possibilità di definirla. Se i filosofi/fisici non erano stati capaci precedentemente di misurare la velocità, non era a causa di blocchi psicologici indotti dalla teoria aristotelica delle categorie attraverso l'opposizione qualità e quantità. Al contrario, la teoria di Aristotele era

(8) Così, secondo Martial Guéroult, «la legge galileiana della caduta dei corpi portava infallibilmente a questo risultato» [in termini moderni, la conservazione dell'energia cinetica] ([GUE], p. 62), e anche, aggiungiamo noi, a qualcosa di più.

(9) È l'argomento di Leibniz per rifiutare la legge cartesiana della conservazione del movimento (citato in [GUE], p. 65, n. 2).

(10) Per un punto di vista opposto, vedere [GUE], p. 63 per esempio. La posizione di Alexandre Koyré è più ambigua.

concepita (almeno in parte) per risolvere i difficili problemi posti dal movimento, tra cui i paradossi di Zenone. L'impossibilità di misurare la «celerità» di un mobile non era dovuta a qualche errore riguardo alla sua appartenenza a qualche categoria, ma era dovuta al fatto che non c'era niente da misurare, solo un'infinità di velocità distinte associate ad un'infinità di movimenti distinti causati da un'infinità di motori distinti.

E Aristotele aveva ragione nel considerare solo i tempi e le distanze come misurabili. Ma cosa dire delle critiche sulla sua incomprensione della «velocità media», la quale può essere definita dal momento che si concepisce una misurazione della distanza e del tempo? È sottovalutare che questa misurazione ha senso solo a condizione di aggiungere, a questa velocità (media), l'intervallo di tempo durante il quale il movimento ha luogo. Altrimenti infatti, la tartaruga sarebbe più veloce di Achille, purché si muova abbastanza a lungo. D'altronde sussiste lo stesso paradosso per il movimento uniformemente accelerato che non è uniformemente continuo (vedere III.1.δ; § III.1, n. 5; e anche [GAL], VII, p. 47-51), paradosso che ritroviamo ancora alla fine del XVIIIesimo secolo nella disputa sulle «forze vive» ([GUE], p. 142).

Conoscere il tempo **e** la «velocità media», tuttavia, è esattamente equivalente a conoscere il tempo e la distanza. Ed è ben questa seconda coppia ad essere realmente misurata, nessuna delle due coppie, d'altronde, dà indicazioni sulla velocità (istantanea) del mobile, come mostra il paradosso di Achille e della tartaruga. Inoltre, la nozione di velocità media, in quanto grandezza, non era certo estranea allo Stagirita, e quindi, *a fortiori*, ai matematici dell'antica Grecia (vedere § I.3′).

In conclusione, non si tratta più di interrogarsi sugli ostacoli a una matematizzazione del movimento, ma di capire come lo studio di un fenomeno estremamente ristretto, la caduta dei corpi, abbia potuto portare a questo formidabile sconvolgimento che furono gli infinitesimali. Essi infatti nasceranno da lavori su un movimento molto particolare, quello indotto dalla gravità, ossia in termini matematici, un movimento rettilineo la cui velocità varia uniformemente.

La novità essenziale era la seguente: dal momento che il concetto di velocità prendeva senso, i.e. che la velocità (istantanea) poteva essere misurata tramite la sua equivalenza ad uno spazio, la velocità non dipendeva più dal movimento o dal motore e diventava universale. E Galileo, suo malgrado, diventava «uno di quegli ispiratori di quella geometria superiore dalla quale doveva nascere l'applicazione del calcolo infinitesimale alle realtà dinamiche» ([GUE], p. 82, n. 2).

Nuovi problemi comparivano, i problemi inversi. Si trattava di trovare un movimento o una traiettoria la cui velocità avesse certe proprietà (vedere paragrafo precedente, l'esempio cosmogonico dato da Galileo nel *Dialogo* ([GAL], VII, p. 53)). In termini moderni si trattava di risolvere delle equazioni differenziali. Per esempio Huygens estende la legge della costanza dei pendoli (circolari) per gli angoli piccoli al caso generale (cicloide), permettendo di costruire orologi marini che, a loro volta, servono al calcolo molto complesso della longitudine. E poi, naturalmente, in astronomia questo ha portato ad una spiegazione del movimento dei pianeti, e infine ad una teoria della gravitazione universale ([11]).

4. Conclusione.

In questo senso, Newton poteva, senza dubbio, affermare che non aveva fatto altro che indirizzare il suo proprio cammino su quello di Galileo, uno di quei giganti sulle cui spalle aveva trovato rifugio. Tuttavia, questo cammino rimaneva veramente da percorrere per unificare completamente la molteplicità dei movimenti.

Se questo problema è ben un problema platonico, forse il problema di Platone per eccellenza (vedere [OFM2], §§ III.3 e 4), quale posizione prendere in questa lite tra giganti di cui ci parla il filosofo ateniese (cf. [OFM2], § II. 3)?

Dobbiamo proclamare Galileo la «*rivincita di Platone (...) che ha rovesciato l'impero di Aristotele*» ([KOY2], p. 321), al prezzo, certo, di un'alleanza diabolica con Democrito?

Oppure dobbiamo, secondo M. Clavelin (op. cit., p. ix) che menziona questo punto di vista per criticarlo, guardare Galileo come «l'ultimo discepolo di Aristotele» (posizione adottata da P. Duhem e W.A. Wallace)?

([11]) «da queste pagine capitali [*i Discorsi*] è venuto l'impulso che, in meno di cinquant'anni, ha permesso la meccanizzazione del sistema del Mondo» (dice Maurice Clavelin nella sua introduzione alla traduzione francese dei *Dialoghi* (p. xxii-xxiii)).

Oppure ancora, non ci dovremmo chiedere se, come nel *Sofista* (vedere [OFM2], § III.4), queste due posizioni non conducano alla loro propria rovina?

Seguendo la nostra analisi, infatti, i testi di Aristotele e di Galileo non solo differiscono per la lingua, ma anche per i termini, rispettivamente quelli che si collegano a ταχύς e a *velocitas/velocità*. La prima posizione, lungi dal dare tutta la sua importanza ai lavori galileiani sul movimento, nega la rivoluzione concettuale compiuta al loro seguito. La seconda, volendo rendere giustizia alla scolastica erede di Aristotele, ne fa il responsabile del fatto che tale rivoluzione non sia stata compiuta ben prima.

Concepire la costituzione della velocità sotto forma epistemologica, riporta a rinchiudersi in una tale impossibile alternativa. Perché, al contrario, è la sua formalizzazione matematica, attraverso la teoria degli infinitesimali, a darle un senso. Ma reciprocamente la nozione matematica degli infinitesimali nasce solo al seguito del lavoro dei fisici. L'epistemologia deve fare posto, anzi fare un posto, all'ontologia. Affinché sia possibile capire la natura della velocità, questa deve esistere fisicamente, cioè essere oggetto di misura. Da un punto di vista matematico, la velocità è un rapporto tra infinitesimali. È a questa unità, essere fisico/essere matematico, che giunge, non senza fatica, l'intelligenza in lotta con se stessa.

Testi citati.

[ARI] Aristotele, *Fisica*, in Opere, volume terzo, Biblioteca Universale Laterza, Roma-Bari (1991)

[BRU] Léon Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique*, 1912, rééd., Blanchard, 1993

[CR-PE] Michel Crubellier - Pierre Pellegrin, *Aristote, le philosophe des savoirs*, Seuil, 2002

[CLA] Maurice Clavelin, *La philosophie naturelle de Galilée*, 1968, rééd. 1996

[DRA] Stillman Drake, *Galileo at work: his scientific biography*, Univ. Press of Chicago, 1978 (*Galileo: una biografia scientifica*, trad. di L. Ciancio, Il Mulino, 1988)

[EUC] Euclide, *Elementi*, (curato da Frajese A., Maccioni M.), coll. Classici della Scienza, UTET (1996)

[GAL] Galileo Galilei, *Le opere di Galileo Galilei*, Edizione Nazionale, a cura di A. Favaro, G. Barbera (1890, 1909), ristampa 1968, 20 volumi

[GEY] Ludovico Geymonat, *Galileo Galilei*, Piccola Biblioteca Einaudi, Einaudi (1981)

[GIU] Enrico Giusti, *Euclides Reformatus la teoria delle propozioni nella scuola Galileiana*, Bollati Boringhieri, 1993

[GUE] Martial Guéroult, *Leibniz, dynamique et métaphysique*, Aubier, 1967

[HAL] Paul R. Halmos, *Naïve Set Theory*, Springer 1974 (*Teoria elementare degli insiemi*, Feltrinelli, 1970)

[KOY1] Alexandre Koyré - Galileo - Plato, *Journal of the History of Ideas*, IV, 4, 1943, p. 400-428 (in *Introduzione a Platone,* a cura di L. Sichirollo Editori Riuniti, 1996)

[KOY2] Alexandre Koyré, *Gassendi et la science de son temps*, Tricentenaire de Pierre Gassendi, repris in Étude d'histoire de la pensée scientifique, Gallimard, 1973

[KOY3] Alexandre Koyré, *Études galiléennes*, Hermann, 1966 (*Studi Galileiani*, trad. di M. Torrini, Einaudi, 1979)

[LEI1] W. Gottfried Leibniz, *Leibnizens mathematische Schriften*, éd. Gebhart, 1860

[LEI2] W. Gottfried Leibniz, *Nouveaux essais sur l'entendement humain*, Flammarion, 1990 (*Nuovi saggi sull'intelletto umano*, in *Scritti filosofici*, a cura di M. Mugnai e E. Pasini, Vol.II, UTET, 2000)

[OFM1] Salomon Ofman, *Pensée et rationnel: Spinoza*, Harmattan, 2003

[OFM2] Salomon Ofman, *Movimento ed origine del calcolo infinitesimale. Filosofia e continuità.* La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista dell'U.M.I., Serie I, Vol. I, aprile 2008, 165-192

[OFM3] Salomon Ofman, *Mouvement et origine du calcul infinitésimal: Aristote, Euclide, Galilée*, L'Harmattan (in preparazione)

[PLA1] Platone, *Repubblica*, trad. F. Sartori, Laterza, 2006

[PLA2] Platone, *Parmenide*, trad. G. Cambiano, Laterza, 2003

[PLA3] Platone, *Politico*, trad. P. Accattino, Laterza, 1997

[PLA4] Platone, *Teage, Carmide, Lachete, Liside*, trad. B. Centrone, Rizzoli, 1997

[PLU] Plutarco, *Vite parallele*, Rizzoli, 2003

[POI] Henri Poincaré, *Cournot et les principes du Calcul infinitésimal*, in Revue de Métaphysique et de morale, mai 1905, in *Dernières pensées*, 125-135, Kimé, 1999 (*Pensieri Ultimi*, in *Opere epistemologiche*, a cura di G. Boniolo, Piovan, 1989)

[WHI] N. Alfred Whitehead, *La science et le monde moderne,* Ed. du Rocher, 1994 (ed. originale, Cambridge Univ. Press, 1926) (*La scienza e il mondo moderno*, Bollati Boringhieri, 1979)

Salomon Ofman
Institut de mathématiques - CNRS Gèomètrie et dynamique
2 Place Jussieu, Paris, France
e-mail: ofman@math.jussieu.fr

Allegato

Le leggi dell'urto secondo Cartesio.

Si considerano due corpi B e C che si dirigono l'uno verso l'altro, uno di essi potendo tuttavia essere in riposo. Si notano ancora B e C le loro grandezze rispettive [è una nozione piuttosto vaga, che può essere assimilata, in modo molto approssimativo, a quella di massa di un corpo], V e W le loro velocità prima dell'urto, V' e W' le velocità dopo l'urto (la velocità è considerata come un numero positivo). Benché questo non sia esplicitamente precisato da Cartesio, le loro traiettorie sono situate su una stessa retta. Si dice determinazione la direzione (e il senso) del movimento. In particolare le velocità di due mobili possono essere uguali ed avere determinazioni opposte, in questo caso i mobili si spostano in senso opposto. Le regole devono permettere di conoscere V' e W' ed anche le loro determinazioni. (...)

Regola 1

Se $B = C$ e $V = W$ allora $V' = V$ e $W' = W$ ed entrambi cambiano [il senso della] determinazione.

Regola 2

Se $B > C$ e $V = W$ allora $V' = V$ e $W' = W$, e W' cambia determinazione (tuttavia solo il testo latino dà esplicitamente l'uguaglianza delle velocità dopo l'urto).

Regola 3

Se $B = C$ sono entrambi in movimento e $V > W$, allora $V' = W' = (V + W)/2$ e solo W cambia determinazione.

Regola 4

Se $B < C$ e C è in riposo, allora $V' = V$ e cambia determinazione, mentre C rimane in riposo.

Regola 5

È la formula più complessa.

Se $B > C$ e C è in riposo, allora $V' = W' = V - (C/(B+C))V$, V e V' hanno stessa determinazione. Per esempio se B è 2 volte più grande di C, dopo l'urto B perde un terzo della sua velocità; se è 3 volte più grande, ne perde un quarto.

(...)

Regola 6

La regola 6 verte sull'urto tra due corpi B e C, della stessa grandezza, il primo essendo in movimento verso il secondo che è in riposo. Per Cartesio, il senso di B verrebbe invertito, mentre C verrebbe respinto in senso opposto.

(...)

Se $B = C$ e C è in riposo, allora $V' = (3/4)V$, il senso di V' è opposto a quello di V e $W' = V/4$ ha lo stesso senso di V (vedere supra, fig. 1 e 2) ([OFM1], §30, p. 367-375).