# La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana



Remigio Russo, Giulio Starita


## Il Principio delle Velocità Virtuali


*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **1** (2008), n.3, p. 493–524.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_3_493_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Dicembre 2008, 493-524

# Il Principio delle Velocità Virtuali

REMIGIO RUSSO - GIULIO STARITA

## 1. – Introduzione

Il *Principio delle Velocità Virtuali* ([1]) è uno degli enunciati più famosi e ricchi di applicazioni della teoria matematica dell'equilibrio. Esso ha per oggetto lo studio delle configurazioni di equilibrio di un sistema composto da un certo numero di corpi rigidi, eventualmente schematizzabili come punti materiali, collegati per mezzo di barre o fili, appoggiati su piani o altre superfici, in una parola vincolati nella loro mobilità, come accade ad esempio nelle macchine (leve, pulegge etc.) ideate fin dall'antichità per consentire all'uomo di trasportare e sollevare pesi con poco sforzo.

La grande popolarità di cui gode nelle scienze applicate è dovuta alla circostanza che esso consente, con semplici considerazioni di carattere geometrico, la determinazione delle configurazioni di equilibrio del sistema. Infatti, volendo verificare se il sistema permane in equilibrio in una data configurazione, si studiano tutti i movimenti che esso può eventualmente compiere a partire da quella configurazione compatibilmente con i vincoli cui è sottoposto. Orbene, la condizione che garantisce l'equilibrio deriva dalla valutazione del lavoro che le forze agenti sul sistema dovrebbero compiere per determinare quegli spostamenti: se tra di essi ne esiste almeno uno in corrispondenza del quale il lavoro è positivo allora la configurazione non è di equilibrio

([1]) A partire dalla seconda metà del XIX secolo nella letteratura scientifica e nella manualistica il principio in oggetto è più spesso chiamato *Principio dei Lavori Virtuali*; in questo articolo, principalmente rivolto ad una analisi storica della sua genesi, si è preferitto conservare la terminologia originariamente adoperata dagli studiosi che nel XVIII secolo lo hanno formulato.

mentre lo è se, al contrario, quel lavoro risulta essere sempre nullo o negativo. L'attributo *virtuale* è da porre in relazione al carattere puramente ipotetico degli spostamenti presi in considerazione; l'uso del termine velocità può poi essere giustificato dal fatto che tali spostamenti si immaginano eseguiti nel medesimo tempo e pertanto risultano proporzionali alle corrispondenti velocità.

Il Principio delle Velocità Virtuali ha origini assai remote e il suo primo germe risale al grande filosofo greco Aristotele; l'evoluzione di questa idea originale coincide in larga misura con la storia della Statica che si sviluppa, a partire dai primi studi in epoca greca, attraverso le ricerche dei matematici del medioevo e via via fino alla sua completa maturazione che si può far coincidere con l'opera di Lagrange. Questi fa del Principio il fondamento della Statica ed anzi, attraverso il principio di d'Alembert che consente di ricondurre alla statica anche la dinamica, di tutta la Meccanica. In questo senso, il Principio delle Velocità Virtuali può essere considerato il principale assioma su cui si basa la Meccanica. Questa affermazione non contrasta con la circostanza che, tra la fine del XVIII e l'inizio del XIX secolo, fioriscono le dimostrazioni del Principio e lo stesso Lagrange si cimenta con tale esercizio. Infatti tali dimostrazioni altro non sono che il tentativo di ricondurre il Principio delle Velocità Virtuali, estremamente potente ma scarsamente intuitivo, a qualche altro principio dotato di maggiore evidenza.

D'altra parte, con la pubblicazione nel 1687 dei Principia di Newton si perviene alla costruzione di una teoria completa di tutti i problemi legati al movimento potenzialmente capace di inquadrare al proprio interno anche i fenomeni dell'equilibrio. Anche se un'analisi dei trattati di Meccanica mostra come questa idea si faccia largo con grande lentezza nei secoli successivi, appare chiaro che, volendo sviluppare in maniera coerente il punto di vista newtoniano, bisogna porsi il problema del ruolo del Principio delle Velocità Virtuali che cessa di essere un assioma e di conseguenza non può che essere riguardato come una necessaria conseguenza delle equazioni del moto. In altre parole, il ruolo del Principio delle Velocità Virtuali in tale contesto non può essere che quello di un teorema da dimostrare assumendo tutte le ipotesi che risultano necessarie.

Una tale dimostrazione risulta in effetti assai semplice quando i vincoli cui è sottoposto il sistema sono di tipo bilaterale (ad esempio il pendolo semplice): in tal caso, infatti, essa scaturisce dalle proprietà di unicità delle soluzioni del problema di Cauchy per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie.

Più complessa è la questione della dimostrazione della sufficienza del Principio delle Velocità Virtuali per i sistemi soggetti a vincoli unilaterali (ad esempio solido pesante poggiato su una superficie); in tal caso, infatti, il modello matematico che traduce il problema è costituito da un sistema di equazioni e disequazioni cui non è applicabile, a quanto ci risulta, un risultato generale di unicità; dimostrare il Principio delle Velocità Virtuali in questo caso vuol dire dimostrare l'unicità della soluzione costante. La difficoltà di questo problema è confermata dal fatto che in tutti i manuali di Meccanica Razionale consultati il Principio viene enunciato come teorema ma si sorvola sulla dimostrazione o si esprimono considerazioni piuttosto generiche.

In questo articolo si illustra il percorso delle idee che, partendo dalla prima intuizione di Aristotele, hanno condotto alla moderna formulazione del Principio delle Velocità Virtuali. Nella sezione conclusiva, partendo da un'analisi di alcune delle dimostrazioni del Principio che sono state proposte tra il XVIII e il XIX secolo, si discute del significato stesso da attribuire al concetto di dimostrazione con riferimento al Principio delle Velocità Virtuali a seconda che esso sia riguardato come il principio fondante della statica come scienza autonoma o che vada contestualizzato in un ambito che riduce la statica ad un caso particolare della dinamica.

## 2. – Il primo germe del Principio delle Velocità Virtuali

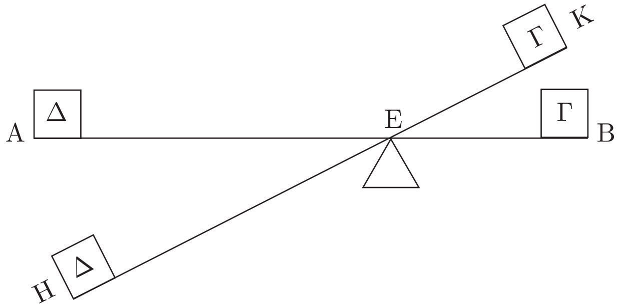
La più antica opera di statica pervenutaci è, con grande probabilità, la *Meccanica* (o anche *Problemi Meccanici*, [3]). Si tratta di uno scritto anticamente attribuito ad Aristotele (384 a.C.–322 a.C.) ma la cui genuinità è stata posta in dubbio soprattutto nel XIX secolo; gli studi più recenti, a partire dai classici testi di Clagett ([5]) sulla statica e la meccanica medievali, hanno riaperto la questione della paternità dei *Problemi Meccanici* al punto che risulta fortemente accreditata l'ipotesi secondo cui l'opera sia da attribuire ad Aristotele o, comunque, a uno dei suoi diretti allievi. Nel seguito, per semplicità di esposizione, noi continueremo a riferirci ad Aristotele come autore dell'opera mentre, per una discussione approfondita della questione dell'attribuzione, rimandiamo all'ampia introduzione alla traduzione in italiano dell'opera, recentemente pubblicata a cura di M. E. Bottecchia Dehò.

I *Problemi Meccanici* sono incentrati su una serie di quesiti che, riprendendo le parole di G. Vailati ([11]), *sono per lo più del seguente tipo: Qual è la ragione per cui, col mezzo di tale o tale altro strumento, l'uomo riesce a superare con piccolo sforzo grandi resistenze?* La strategia ideata dall'Autore per rispondere a tale domanda si basa sempre sul riconoscimento dell'equivalenza tra il modo di operare dello strumento che di volta in volta si analizza con l'azione di una o più leve. Per tale motivo, questo elementare dispositivo, la leva, assume nel trattato aristotelico un ruolo cardinale; fin dalle prime pagine l'Autore si chiede come sia possibile che, per mezzo di tale strumento, *possa essere mosso un grande peso da una piccola forza*. Gli argomenti che egli sviluppa per spiegare un tale apparente paradosso sono di grande interesse e costituiscono il naturale punto di partenza per la nostra indagine storica sul Principio delle Velocità Virtuali.

Aristotele individua la causa dei fenomeni che si osservano nella leva nelle proprietà del cerchio e dei moti circolari: *Ora, tra i problemi che suscitano difficoltà..., rientrano quelli riguardanti la leva, dal momento che appare inspiegabile che possa essere mosso un grande peso da una piccola forza,... Di tutte tali cose il principio fondamentale è il cerchio*. Infatti, quando si osserva il moto di un dispositivo girevole intorno ad un asse, immediatamente si nota che ...*dato un unico segmento tracciato dal centro come raggio, nessuno dei punti che sono in esso si muove a velocità uguale ad un altro, ma in ogni caso si muove più rapidamente quello che è più lontano dall'estremo che è fisso*. La causa di questo comportamento diverso dei punti a seconda della loro distanza dal comune centro di rotazione risiede nella specificità del moto circolare che è al tempo stesso secondo natura, nella sua componente tangenziale, e contro natura, nella sua componente centripeta: *Ad ogni raggio che descrive un cerchio accade* *dunque questo, cioè si muove secondo la circonferenza secondo natura e contro natura in direzione della tangente e verso il centro; maggiore è sempre il movimento contro natura secondo cui si muove il raggio minore: infatti, poiché è più vicino al centro che trae in senso opposto, ne subisce maggiormente l'influenza.* In altre parole, un punto più vicino al centro risente in maniera maggiore dell'azione del centro che lo trae e, al tempo stesso, si muove più lentamente, nel senso che descrive in uno stesso tempo, archi minori rispetto ad un punto più lontano dal centro e, dunque, meno influenzato dal suo richiamo.

Le considerazioni precedenti istituiscono un chiaro nesso tra l'intensità dell'azione, della forza, cui un punto è assoggettato e la sua velocità. Tale collegamento è del resto pienamente in sintonia con i principi ispiratori della meccanica di Aristotele il quale, distinguendo tra moto naturale e moto non naturale, afferma che quest'ultimo ha bisogno dell'azione di una forza per essere prodotto e per essere mantenuto; questa forza deve essere tanto più grande quanto maggiore si vuole sia la velocità da imprimere all'oggetto. Assai chiarificatori risultano, a questo proposito, due brani rispettivamente tratti dal *Cielo* e dalla *Fisica*: *Quale che sia la potenza che produce il movimento è certo che ciò che è più leggero riceve, a parità di potenza, un movimento più grande. In realtà la velocità del corpo meno pesante starà alla velocità del corpo più pesante così come il secondo corpo sta al primo*. Ed ancora: *Siano $\alpha$ la forza motrice, $\beta$ il corpo mosso, $\gamma$ la distanza attraversata e $\delta$ il tempo impiegato durante il moto. Allora, la stessa forza $\alpha$ sposterà la metà di $\beta$ di una lunghezza due volte $\gamma$ in uno stesso tempo $\delta$ o di una distanza $\gamma$ in un tempo metà di $\delta$.*

Tornando allora al filo logico seguito nei *Problemi Meccanici*, ecco come Aristotele enuncia il principio della leva: *Sono tre però le cose che costituiscono la leva, cioè il fulcro, che funge da sparto e centro, e i due pesi, cioè quello che muove e quello che viene mosso. Orbene, il rapporto che intercorre tra il peso che viene mosso e quello che muove è inverso al rapporto che intercorre tra le distanze dal centro*. E il principio è in tal modo spiegato: *La causa è quella detta precedentemente, cioè che il raggio maggiore descrive un cerchio maggiore: cosicché, per effetto della medesima forza, lo spostamento sarà tanto maggiore quanto più il motore dista dal fulcro. Supponiamo AB una* *leva, Γ il peso e Δ il motore; il fulcro sia in E. Dopo il movimento, Δ si trova in H; il peso mosso, però, cioè Γ, sarà in K.*




La spiegazione che Aristotele fornisce del principio della leva riveste un notevole interesse metodologico, poiché essa inquadra la teoria dell'equilibrio in quella, più generale, del movimento fondandola su un unico principio, sintetico, e sviluppando a partire da esso un procedimento applicabile, in linea di principio, allo studio di qualsiasi meccanismo. Il principio, più o meno esplicitamente enunciato, consiste nell'assunzione che l'efficacia di una forza nel porre un corpo in movimento vada misurata come prodotto del peso del corpo per la velocità che ad esso si impartisce e dunque devono ritenersi equivalenti forze che, ponendo in movimento corpi diversi, determinano il medesimo prodotto di peso per velocità. Il procedimento consiste nell'analizzare i movimenti possibili di un meccanismo e misurarne i prodotti dei pesi per le loro velocità: quando questi si equivalgono si ha equilibrio tra le forze e non si produce alcun movimento.

Non può sfuggire come l'approccio aristotelico contenga, sia pure in forma embrionale, il germe del Principio delle Velocità Virtuali, ed in effetti ciò è stato ampiamente sottolineato dagli storici della scienza e dai commentatori, a partire da P. Duhem che, nella sua imponente opera sulle origini della statica ([8]), così si esprime: *Non avesse formulato che questo solo pensiero, Aristotele meriterebbe di essere celebrato come il padre della Meccanica razionale. Questo pensiero, in effetti, è il seme dal quale usciranno, attraverso uno sviluppo di venti secoli, le potenti ramificazioni del Principio delle velocità virtuali.*

Naturalmente, vanno rilevate alcune importanti differenze tra la moderna formulazione del Principio delle Velocità Virtuali e il metodo di

Aristotele. La principale di esse va ricercata nel concetto stesso di forza che, in Aristotele, non presenta alcun elemento che possa far pensare a quello che oggi chiamiamo carattere *vettoriale*; le forze differiscono tra di loro esclusivamente per l'intensità. Un secondo elemento di differenziazione tra il principio aristotelico e quello moderno, sottolineato da M. Clagett ([5]), riguarda quelli che noi, con linguaggio moderno, chiamiamo spostamenti virtuali e che, nella versione del filosofo stagirita, non hanno il carattere rettilineo e infinitesimo che noi attribuiamo loro ma sono piuttosto considerati lungo le effettive traiettorie consentite ai punti (nel caso della leva, archi di circonferenza).

Per concludere questa breve disamina della statica aristotelica, possiamo sinteticamente affermare che essa si fonda sull'applicazione di un metodo basato sull'idea, sia pure ancora in una forma grezza, del Principio delle Velocità Virtuali. Le potenzialità insite nel metodo adoperato non sono peraltro completamente sviluppate; perché questo accada occorrerà attendere che, a partire dal XIII secolo, l'intuizione dell'Autore dei *Problemi Meccanici* si saldi con una più solida padronanza degli strumenti della matematica e delle sue tecniche dimostrative.

## 3. – Il Principio della Leva in Archimede

In questa sezione abbandoniamo temporaneamente il percorso che ci condurrà dalla prima intuizione di Aristotele alla moderna formulazione del Principio delle Velocità Virtuali per soffermarci su un'altra importante opera di statica di epoca greca dovuta ad Archimede (287 a.C.–212 a.C.) e contenente una celebre dimostrazione del Principio della Leva.

Ciò che rende assai interessante la figura di Archimede, in relazione alle finalità di questo articolo, è che il suo approccio ai problemi di statica risulta completamente diverso e, per certi aspetti, antitetico a quello di Aristotele. In Archimede lo spirito matematico è prevalente rispetto a quello speculativo ed il modello cui egli pare ispirarsi nella sua opera intitolata *Sull'equilibrio dei piani* è quello euclideo fondato sull'accettazione di alcune proposizioni, gli assiomi – considerate evidenti e riferite a situazioni particolari di equilibrio – e su rigorose dimostrazioni deduttive delle condizioni di equilibrio per i sistemi via

via più complessi, eseguite a partire dagli assiomi e adoperando gli strumenti propri della logica matematica.

Le proposizioni che Archimede assume come assiomi sono sette ma alcune di esse concernono proprietà dei centri di gravità delle figure piane; elenchiamo dunque solamente i primi tre assiomi, più significativi dal punto di vista squisitamente statico:

*I. Chiediamo [che si ammetta] che pesi uguali [sospesi] a distanze uguali si facciano equilibrio; che pesi uguali [sospesi] a distanze disuguali non si facciano equilibrio, ma producano pendenza dalla parte del peso che si trova a distanza maggiore.*

*II. Che se dati dei pesi che si facciano equilibrio essendo [sospesi] a certe distanze, si aggiunga qualcosa ad uno dei pesi, non si abbia più equilibrio, ma pendenza dalla parte al quale si è fatta l'aggiunta.*

*III. Che similmente se da uno dei pesi si tolga qualcosa, non si abbia più equilibrio, ma pendenza dalla parte del peso dal quale non si è sottratto nulla.*

Il principio della leva viene mostrato prima nel caso di pesi commensurabili e poi esteso, per mezzo di una riduzione ad assurdo, a quello dei pesi incommensurabili:

PROPOSIZIONE 6. – *Le grandezze commensurabili sono in equilibrio se sospese a distanze inversamente proporzionali ai pesi.*

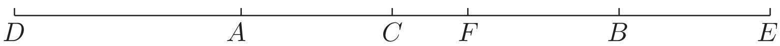
PROPOSIZIONE 7. – *Ed anche se le grandezze sono [tra loro] incommensurabili, similmente manterranno l'equilibrio se sono poste a distanze inversamente proporzionali alle grandezze.*

Proviamo a riprodurre la dimostrazione che Archimede dà della Proposizione 6 in un linguaggio moderno. Consideriamo dunque due corpi (piani) di pesi $a$ e $b$ i cui centri di gravità occupino le posizioni $A$ e $B$.


Sul segmento di estremi $A$ e $B$ si individui il punto $C$ tale che si abbia

$$a : b = CB : AC. \tag{3.1}$$

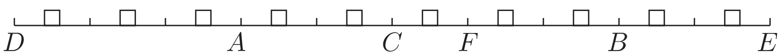
La Proposizione 6 sarà provata se si mostrerà che $C$ è il centro di gravità del sistema. A tale scopo, prolunghiamo il segmento di estremi $A$ e $B$ alla sinistra fino ad un punto $D$ tale che $DA = CB$ e alla destra fino ad un punto $E$ tale che $AC = BE$. Il punto $C$ è in tal modo il centro del segmento di estremi $D$ ed $E$. Prendiamo ancora a sinistra di $A$ un punto $F$ tale che $DA = AF$, cosicché $A$ è il punto medio del segmento di estremi $D$ ed $F$. Allo stesso tempo, $B$ è punto medio del segmento di estremi $F$ ed $E$; infatti, per costruzione si ha $AF = CB$ e dunque, sottraendo a entrambi i segmenti quello di estremi $C$ ed $F$, $FB = AC = BE$. Ricordiamo ora che, per ipotesi, le grandezze $a$ e $b$



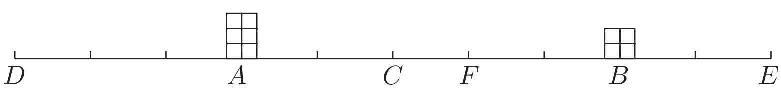

sono commensurabili e dunque tali sono anche $CB$ e $AC$, nonché $DF$ ed $FE$. Sia allora $l$ una misura contenuta un numero intero di volte sia in $DF$ ed $FE$:

$$DF = nl, \qquad FE = ml.$$

Sia poi $c$ un peso contenuto $n$ volte in $a$ ed $m$ volte in $b$. Se dividiamo il peso $a$ in $n$ parti uguali di grandezza $c$, possiamo distribuire i pesi così ottenuti nei centri di gravità di altrettanti segmenti, di lunghezza $l$, in cui possiamo dividere il segmento di estremi $D$ ed $F$; analogamente, il peso $b$ è scomponibile in $m$ pesi $c$ da distribuire nei centri di gravità dei segmenti di lunghezza $l$ in cui dividiamo quello di estremi $F$ ed $E$. Il peso totale $a + b$ è distribuito sul segmento di




estremi $D$ ed $E$ in modo che il suo centro di gravità sia nel suo punto medio $C$ e pertanto esso è in equilibrio. D'altra parte il peso $a$, distribuito tra $D$ ed $F$, ha il suo centro di gravità in $A$, così come il peso $b$, distribuito tra $F$ ed $E$, ha il baricentro in $B$. In conclusione, si ha




equilibrio quando il peso $a$ ha il suo baricentro in $A$ e quello $b$ in $B$

purché il fulcro della leva sia posto nel punto $C$ scelto in modo che sia soddisfatta la condizione (3.1).

Abbiamo voluto esporre diffusamente le pagine dedicate da Archimede allo studio della leva per palesarne le profonde differenze con il metodo aristotelico. Il principio unificante proposto dal filosofo stagirita, forse non autoevidente ma contenente, in potenza, la spiegazione delle condizione di equilibrio di tutti i dispositivi, viene sostituito da Archimede con delle proposizioni che, al contrario, contengono la risposta esclusivamente ad un problema assai particolare ma che rivestono carattere di assoluta evidenza.

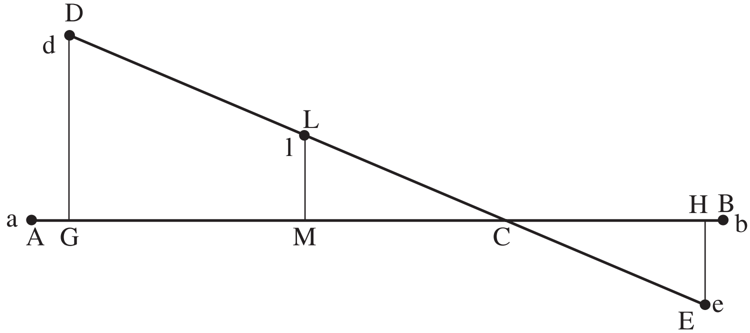
A marcare ulteriormente l'alternatività degli approcci ai problemi di statica di Aristotele e Archimede, giova osservare come il primo fondi il loro studio su un principio di carattere eminentemente dinamico mentre il secondo contribuisce alla nascita della statica come scienze completamente autonoma.

Nelle pagine seguenti avremo modo di verificare come i due punti di vista presenti fin dai primordi nello studio dei problemi di statica daranno origine a scuole di pensiero che, nel corso dei secoli, saranno chiaramente identificabili e, in qualche caso, palesemente contrapposte. Eppure sarà proprio dall'intreccio dialettico con il punto di vista che Duhem definisce *geometrico* che l'idea originale di Aristotele avrà modo di delinearsi e di pervenire alla propria completa maturità.

## 4. – Il Principio delle Velocità Virtuali nel Medioevo

Nei secoli XII e XIII la copiosa attività di traduzione in latino di testi greci e arabi propizia uno sviluppo della statica che si concretizza nella pubblicazione di tre opere attribuite ad un autore, Giordano Nemorario, di cui si hanno pochissime notizie storiche ed intitolate *Elementa Jordani de ponderibus*, *De ponderibus* e *De ratione ponderis*. È molto probabile che tali opere traggano origine dalla traduzione di uno scritto greco o arabo contenente un nucleo di una decina di proposizioni di cui Giordano avrebbe modificato le dimostrazioni; successivamente il trattato sarebbe stato ampliato dallo stesso Giordano o da un suo allievo fino a contenere quarantacinque proposizioni. Esse rivestono un particolare rilievo ai fini della nostra discussione sull'evoluzione del Principio delle Velocità Virtuali, poiché appaiono fortemente influenzate dalla visione aristotelica, ma contengono al tempo stesso dimostrazioni di assoluto rigore matematico. Il passo che di seguito citiamo riproduce l'enunciato del principio della leva come riportato in [5].

> *Se i bracci di una bilancia sono proporzionali ai pesi applicati ad essi, nel senso che al più corto sia applicato il peso più grave, i corpi appesi saranno ugualmente gravi per posizione.*




Giordano propone una dimostrazione di tale proposizione che parte dall'osservazione che, qualora i due pesi $a$ e $b$ posti rispettivamente in $A$ e $B$ non fossero in equilibrio, allora uno dei due, diciamo il primo, dovrebbe salire e l'altro discendere; ma allora ad una altezza di salita $h$ del primo peso ne corrisponderebbe una di discesa $k$ del secondo tra loro nel medesimo rapporto delle distanze di $A$ e $B$ dal giogo $C$. In tal caso, un peso $b$ posto nel punto $M$ alla medesima distanza di $B$ da $C$ salirebbe di un'altezza $k$. Dal momento che quest'ultima circostanza non può spontaneamente aver luogo – dal momento che pesi uguali alle stesse distanze dal fulcro sono in equilibrio – allora neppure la prima è realizzabile.

Anche se Giordano lo sottointende, affinché la sua dimostrazione sia perfettamente comprensibile occorre assumere che vi sia piena equivalenza tra l'operazione di sollevare un peso $a$ di un'altezza pari a $h$ e quella di sollevare un peso pari ad $aa$ di un'altezza $h/a$. Tale assunzione, nella quale nuovamente riconosciamo l'idea essenziale del Principio delle Velocità Virtuali, fu del resto resa esplicita già dai primi commentatori delle opere di Giordano.

Il contributo dei matematici medievali alla statica va oltre la convincente prova del principio della leva, appena discussa; la padronanza del metodo dimostrativo consente di fornire una soluzione a due nuovi problemi la cui discussione è contenuta nel *De ratione* ed è forse opera di un discepolo di Giordano. Il primo di essi è quello della cosiddetta *leva angolare*: i due bracci di una leva si diramano da un comune fulcro e formano tra di loro un certo angolo $\alpha$; si vuole dimostrare che due pesi uguali posti negli estremi dei bracci e che si trovano alla medesima distanza dalla verticale passante per il fulcro sono in equilibrio:

> *Se i bracci di una bilancia sono disuguali e fanno angolo nel centro del moto e se i loro estremi sono ugualmente vicini da un lato e dall'altro alla verticale, pesi uguali appesi in questa disposizione peseranno ugualmente.*

Il secondo problema è quello dell'equilibrio di due pesi su due piani diversamente inclinati. In questo caso si tratta di provare che se due pesi tenuti da un filo sono disposti su due piani con diversa inclinazione e se sono proporzionali alle lunghezze dei piani allora sono in equilibrio:

> *Se per vie di diversa obliquità scenderanno due pesi, e declinazioni e pesi saranno proporzionali, nello stesso ordine, i pesi avranno la stessa virtù nel discendere.*

Entrambe le dimostrazioni muovono dall'esame di tutti i movimenti che il sistema potrebbe eventualmente compiere per escluderli uno alla volta evidenziandone, richiamandosi all'implicito principio precedentemente richiamato, l'equivalenza con situazioni in cui il moto certamente non può aver luogo. L'equilibrio viene così provato per esclusione.

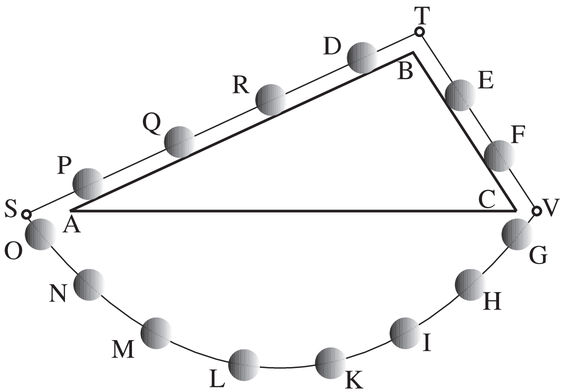
## 5. – La statica moderna e la formulazione definitiva del Principio delle Velocità Virtuali

Il contributo di Giordano e dei suoi allievi alla statica non fu accolto dai loro contemporanei e le loro opere vennero via via dimenticate per essere riscoperte, per merito di Duhem, solamente tra la fine del XVIII e l'inizio del XIX secolo. In particolare, la risoluzione del problema del piano inclinato fu ignorata e di quel problema si interessarono, tra gli altri, Biagio da Parma, Guido Ubaldo del Monte, Leonardo da Vinci proponendone dimostrazioni talvolta evidentemente errate. Solo alcuni secoli più tardi Simon Stevin e Galileo Galilei presenteranno, quasi contemporaneamente, due soluzioni di questo problema.

Simon Stevin (1548–1620) è, per mentalità, uno scienziato di impostazione archimedea ed anzi la sua opposizione alle idee aristoteliche è aperta; famosa è la sua critica al principio su cui Aristotele fonda lo studio della leva che egli, paradossalmente, esprime in forma di sillogismo:

> *Qualcosa che non si muove non descrive cerchi. Due pesi in equilibrio non si muovono. Quindi, due pesi in equilibrio non descrivono cerchi.*

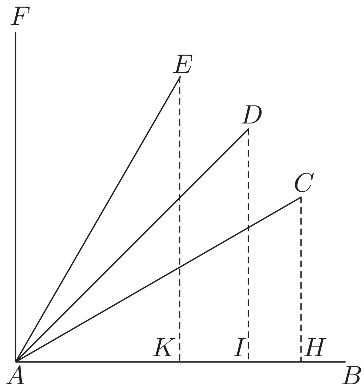
Eppure la soluzione che Stevin dà del problema dei piani inclinati, di grande originalità, si fonda sull'assunzione dell'impossibilità del moto perpetuo. Egli considera un triangolo di vertici $A$, $B$, $C$ con il lato $AC$ orizzontale ed il lato $AB$ di lunghezza doppia di $BC$; si tratta di provare che due pesi posti sui due piani inclinati sono in equilibrio se sono nello stesso rapporto delle lunghezze dei piani, ovvero, per adoperare le parole di Stevin, che un peso sul lato $BC$ ha una *potenza* doppia di uno sul lato $AB$. Egli esegue allora una costruzione che consiste nel disporre attorno al triangolo una catena con quattordici sfere di ugual




peso e dimensione poste alla stessa distanza l'una dall'altra. Supponiamo che quattro sfere poste sul lato $AB$ predominino sulle due sul lato $BC$; poiché le quattro sfere $O$, $N$, $M$, $L$ equivalgono, per simmetria, a quelle $K$, $I$, $H$, $G$, allora il complesso delle otto sfere da $D$ fino a $K$ predomina sulle rimanenti sei e conseguentemente esse cominciano a discendere provocando la salita delle altre. Dopo un breve tempo la sfera $P$ raggiunge la posizione inizialmente occupata da quella $O$ e così via di modo che la nuova configurazione che viene a realizzarsi risulta del tutto indistinguibile da quella precedente. *Così il moto non avrà termine, che è assurdo*, conclude Stevin. Ragionando allo stesso modo si conclude che neppure i due pesi sul lato $BC$ possono predominare sui quattro sul lato $AB$ e di conseguenza deve aversi equilibrio. D'altra parte, le otto sfere da $O$ a $G$ sono ininfluenti nel determinare questa situazione di equilibrio e possono essere rimosse. La conclusione è dunque che le quattro sfere sul lato $AB$ sono in equilibrio con le due sul lato $BC$.

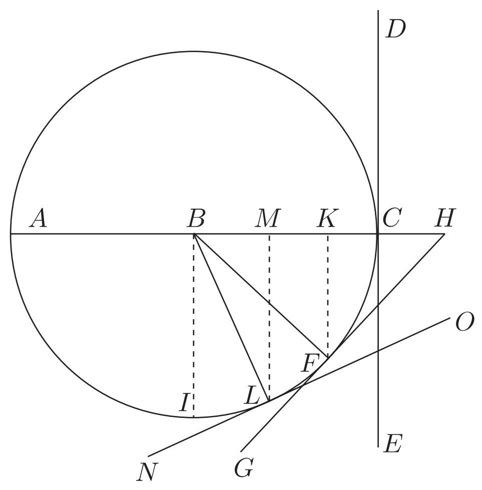
Assai diversa, ma altrettanto interessante, è la dimostrazione di Galileo Galilei (1564–1642) della condizione di equilibrio di un grave su un piano inclinato, pubblicata nel trattato *Le Mecaniche*. Egli inizia con l'osservare che un grave posto su un piano orizzontale perfettamente liscio e pulito può essere spostato da qualunque minima forza; se però si prova a far salire quello stesso grave lungo un piano inclinato, allora occorrerà spingerlo con violenza tanto più grande quanto più il piano risulta inclinato, la massima violenza essendo necessaria per spingerlo in alto lungo la direzione verticale. L'esatta proporzione che sussiste tra l'inclinazione del piano e la forza da applicare al grave è espressa nel seguente enunciato:

> *Fatte dunque cascare le perpendicolari dalli punti C, D, E sopra la linea orizzontale AB, che siano CH, DI, EK, si dimostrerà, il medesimo peso esser sopra il piano elevato AC mosso da minor forza che*



*nella perpendicolare AF (dove viene alzato da forza a sé stesso eguale), secondo la proporzione che la perpendicolare CH è minore della AC; e sopra il piano AD avere la forza al peso l'istessa proporzione, che la linea perpendicolare ID alla DA; e finalmente nel piano AE osservare la forza al peso la proporzione della KE alla EA.*

Per provare tale affermazione, Galileo disegna una circonferenza e considera i suoi raggi come i bracci di leve con il fulcro nel centro e i cui estremi siano armati di opportuni pesi. Così, su una leva $ABC$ saranno in equilibrio due pesi uguali; se però si inclina il secondo braccio facendo via via scorrere la posizione del suo estremo da $C$ da verso $I$, il peso da applicare in tale estremo per mantenere la leva in equilibrio cresce in ragione inversa alla sua distanza dalla verticale condotta da $B$. Se, in particolare, consideriamo la leva $ABF$, il peso che occorrerà porre in $F$ sta a quello bastava in $C$ come la lunghezza del braccio $BF$ sta a $BK$. D'altra parte, afferma Galileo, considerare che il grave discenda lungo la circonferenza $AFC$ perché sostenuto dal braccio $BF$ non è diverso da considerare che discenda lungo quella stessa circonferenza perché poggiato su una superficie piegata in quella forma; *ma quando il mobile è in F, nel primo punto di tale suo moto è come se fosse nel piano elevato secondo la contingente linea GFH, perciò che l'inclinazione della circonferenza nel punto F non differisce dall'inclinazione della contingente FG.* Quest'ultima considerazione, citata



testualmente, fornisce la chiave per la soluzione del problema del piano inclinato; infatti, l'efficacia del grave nell'equilibrare il peso iniziale varierà con l'inclinazione del piano tangente secondo quanto si è appena stabilito per la leva angolare e la determinazione della legge enunciata nella proposizione diviene una questione meramente geometrica.

La dimostrazione di Galileo si fonda sulla riduzione del problema del piano inclinato a quello della leva angolare e e sembra dunque più coerente con il punto di vista di Archimede. È comunque interessante osservare che, nel ragionamento che abbiamo provato a esporre, si intravedano alcune idee che saranno esplicitate secoli dopo da Lagrange. La prima consiste nell'indipendenza del vincolo dalla sua modalità di realizzazione: se un punto è costretto a descrivere una circonferenza non importa se ciò dipenda dalla circostanza che il punto sia sostenuto dal braccio di una leva o che esso scivoli su un piano, una guida avente quella forma; la seconda è l'equivalenza in una data configurazione tra vincoli che, diversi tra loro, consentano almeno in partenza i medesimi spostamenti al punto.

Ma, al di là di queste pur notevoli considerazioni, il ruolo da attribuire a Galileo in una storia del Principio delle Velocità Virtuali si desume dalla lettura di un brano contenuto nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* nel quale, dopo avere analizzato alcuni sistemi meccanici, Galileo conclude con la seguente osservazione:

> *possiamo assertivamente affermare, che quando debba seguire l'equilibrio, cioè la quiete tra essi mobili, i momenti, le velocità, o le lor propensioni al moto, cioè gli spazii che da loro si passerebbero nel medesimo tempo, devon rispondere reciprocamente alle loro gravità, secondo quello che in tutti i casi de' movimenti mecanici si dimostra: sì che basterà, per impedire la scesa del G, che lo H sia tanto men grave di quello, quanto a proporzione lo spazio CF è minore dello spazio FA.*

Quel principio aristotelico, che Galileo non assume come punto di partenza delle sue argomentazioni, viene così ad essere riconosciuto a posteriori, *secondo quello che in tutti i casi de' movimenti mecanici si dimostra*.

Paradossalmente, anche Stevin giunge alla medesima conclusione di Galileo quando, studiando un sistema di carrucole e mostrando che per sostenere un dato peso è necessario un contrappeso pari a un suo ottavo, osserva che d'altra parte per far salire il peso di una certa altezza occorre far discendere il contrappeso di otto volte quell'altezza e ne conclude che *lo spazio percorso dall'agente sta a quello percorso dal paziente così come la potenza del paziente sta a quella dell'agente.*

In tal modo Stevin e Galileo forniscono, con i loro studi, una conferma di quel principio al quale pure non si ispirano e che anzi, nel caso di Stevin, apertamente contestano; essi infatti contribuiscono a rendere quel principio meno astratto, a fornirgli un fondamento assai robusto, trasformando un'intuizione alquanto oscura, sebbene geniale, in una evidente proprietà riscontrabile in una molteplicità di dispositivi, capace di imporsi all'attenzione degli studiosi traendo conferma dagli sviluppi della statica comunque realizzati.

Non stupisce dunque che quasi negli stessi anni il Principio delle Velocità Virtuali torni a farsi strada nelle menti degli studiosi. È lo scienziato e pensatore francese René Descartes (1596-1650) che, nel trattato *Explication des engines par l'ayde desquels on peut, avec une petite force, lever un fardeau fort pesant*, fonda sistematicamente lo studio dei diversi dispositivi meccanici – la leva, il cuneo, il piano inclinato, la puleggia – su un unico principio: *il lavoro necessario per elevare due pesi differenti a differenti altezze è lo stesso se è lo stesso il prodotto del peso per l'altezza.* Il medesimo principio è ribadito in una lettera a Padre Mersenne (1588–1648) del 5 ottobre 1637: *L'invenzione di tutte [le macchine semplici] è basata solo su un unico principio, che è che la stessa forza che può sollevare un peso di, per esempio, cento libbre di un'altezza di due piedi, può anche sollevarne uno di duecento libbre di un'altezza di un piede o uno di quattrocento libbre di un'altezza di mezzo piede, e così via, comunque questa possa essere applicata.*

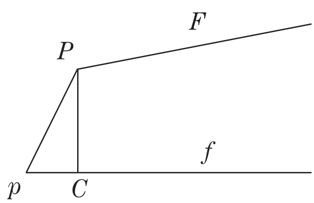
La novità dell'impostazione di Descartes è espressa con grande chiarezza e consapevolezza in una successiva lettera a Padre Mersenne, del 15 novembre 1638, nella quale egli descrive la differenza tra il suo atteggiamento e quello di Galileo con le seguenti parole: *Per quanto Galileo ha scritto trattando della bilancia e della leva, egli* *spiega assai bene il quod ita fit, ma non il cur ita fit, come io faccio con il mio principio.* Il corollario che Galileo riscontra al termine delle proprie indagini e che rappresenta un dato di carattere sperimentale costituisce, per Descartes, la vera ragione dell'equilibrio.

In realtà il principio assunto dallo scienziato francese andrebbe definito degli spostamenti virtuali, piuttosto che delle velocità virtuali; egli infatti rifiuta di ogni legame con la dinamica aristotelica, ritenendo impossibile affermare alcunché circa la velocità e nello studiare le diverse macchine preferisce riferirsi agli spostamenti dei pesi che le compongono: *Riguardo a quelli che dicono che io dovevo considerare le velocità, come Galileo, piuttosto che lo spazio, per rendere ragione delle macchine, io credo, detto tra di noi, che queste sono persone che non parlano che per fantasia, senza intendere niente di questa materia. E benché sia evidente che occorre piú forza per sollevare un corpo molto velocemente che per sollevarlo molto lentamente, è tuttavia pura immaginazione dire che la forza debba essere esattamente doppia per raddoppiare la velocità ed è assai facile provare il contrario.* Osserva Colonnetti, riferendosi a questo brano e ad altri di simile contenuto, che Descartes, rendendo la statica una scienza autonoma, la emancipa dalla dinamica aristotelica di cui egli stesso, come Galileo, stava contribuendo a disvelare le false premesse, con la formulazione del principio d'inerzia, e che poco dopo sarebbe stata completamente superata da Newton.

Nel sostituire gli spostamenti alle velocità, Descartes realizza pienamente il carattere infinitesimo che a quelli va attribuito: *Il peso relativo di ciascun corpo deve misurarsi per mezzo dell'inizio del moto che dovrebbe fare la potenza che lo sostiene tanto per alzarlo che per seguirlo se si abbassa. Notate che io dico cominciare a discendere, non semplicemente discendere, poiché non è che questo principio di discesa cui bisogna fare riguardo.*

In conclusione, svincolato da ogni riferimento alla dinamica aristotelica, riconosciuto il carattere infinitesimo degli spostamenti virtuali, il Principio delle Velocità Virtuali ha pressoché acquisito la sua veste definitiva. Esso però non diviene patrimonio comune degli scienziati dell'epoca; così, se John Wallis (1616–1703) lo fa proprio e lo estende a forze diverse dal peso, altri meccanici continuano a privilegiare un approccio alla scienza della statica nel solco della visione archimedea e sul modello della geometria euclidea. Tra questi, lo scienziato francese Pierre Varignon (1654–1722) che scrive un trattato di statica nel quale tutti i problemi vengono analizzati sulla scorta di un principio di composizione delle forze. Ebbene, proprio in questo trattato Varignon pubblica una lettera di Johann Bernoulli (1667–1748), datata 26 gennaio 1717, nella quale lo scienziato svizzero, dà l'enunciato esplicito del Principio delle Velocità Virtuali.

*Immaginate molte forze differenti che agiscano secondo differenti tendenze o direzioni per mantenere in equilibrio un punto, una linea, una superficie o un corpo; immaginate anche che si imprima al sistema di queste forze un piccolo movimento, sia parallelo a se stesso secondo una qualunque direzione, sia attorno ad un qualsiasi punto fisso: vi sarà facile comprendere che per effetto di questo movimento ciascuna di queste forze avanzerà o retrocederà nella sua direzione, a meno che una o più di tali forze non abbiano la loro tendenza perpendicolare alla direzione del piccolo movimento: nel qual caso questa forza, o queste forze, non avanzeranno o retrocederanno per nulla: poiché questi avanzamenti o rinculi, che sono ciò che io chiamo velocità virtuali, altro non sono che quello di cui ciascuna linea di tendenza aumenta o diminuisce a seguito del piccolo movimento: e questi aumenti o diminuzionisi determinano tirando la perpendicolare all'estremità della linea di tendenza di qualche forza, la quale perpendicolare taglierà dalla stessa linea di tendenza, posta in una situazione prossima dal piccolo movimento, una piccola parte che sarà la misura della velocità virtuale di questa forza.*




*Ad esempio, sia P un qualsiasi punto del sistema che si mantiene in equilibrio. Sia F una delle forze che potrebbe spingere o tirare il punto P nella direzione FP o PF. Sia Pp una breve linea retta che il punto descrive in un piccolo moto, in virtù del quale la tendenza FP* *assume la posizione fp. O questa sarà esattamente parallela a FP, se il piccolo moto è, in ogni punto, parallelo alla retta la cui posizione è data; o formerà un angolo infinitamente piccolo con FP quando questo è prodotto e se il piccolo moto del sistema avviene attorno a un punto fisso. Quindi tracciate PC perpendicolare a fp ed avrete Cp come velocità virtuale della forza F, sicché F $\times$ Cp è quanto io chiamo energia. Si osservi che Cp è positivo o negativo. Il punto P è spinto dalla forza F. È positivo se l'angolo FPp è ottuso e negativo se l'angolo FPp è acuto. Ma al contrario, se il punto P è tirato, Cp sarà negativo quando l'angolo FPp è ottuso e positivo quando è acuto.*

*Tutto ciò inteso, formulo questa proposizione generale: in ogni equilibrio di forze qualsiasi, in qualunque modo siano applicate e secondo qualsiasi direzione esse agiscano le une sulle altre, direttamente o indirettamente, la somma delle energie positive sarà uguale alla somma delle energie negative prese positivamente.*

Non possono sfuggire alcune pecche nello scritto di Bernoulli, che considera solo spostamenti rigidi del sistema e non si pone il problema della loro compatibilità con i vincoli, come sottolinea R. Dugas nella sua *Histoire de la Mécanique* ([7]); resta il fatto che la sua è la prima formulazione moderna del Principio delle Velocità Virtuali e ciò fa dire a Duhem che la lettera di Bernoulli segna il passaggio dalle origini della statica al suo periodo classico.

## 6. – Il metodo di Lagrange

Se a Johann Bernoulli si deve il merito dell'enunciazione del Principio delle Velocità Virtuali, è indubbio che la sua affermazione è indissolubilmente legata alla figura di Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), grande matematico e meccanico italiano di nascita e formazione (il suo nome di battesimo è Giuseppe Lodovico Lagrangia) ma presto trasferitosi prima in Germania e poi in Francia.

L'opera principale di Lagrange è il trattato intitolato *Mécanique Analytique*, pubblicato in prima edizione nel 1788 e in una successiva edizione, non semplicemente rivista ma anche notevolmente ampliata, nel 1811. Nell'introduzione di quest'opera si legge una frase che chiarisce immediatamente lo scopo di fondo dell'Autore:

> *È mia intenzione ridurre la teoria di questa Scienza [Meccanica], e l'arte di risolvere i problemi connessi, a formule generali, il cui semplice sviluppo possa condurre alla risoluzione di ciascun problema.*

Il primo volume della *Mécanique Analytique*, che contiene i capitoli dedicati alla Statica, inizia con una descrizione dei principi che nel tempo sono stati posti a fondamento di questa scienza:

> *L'equilibrio risulta dalla distruzione di più forze che si combattono e che annientano reciprocamente l'azione che esse esercitano le une sulle altre; e lo scopo della Statica è di dare le leggi secondo cui si opera questa distruzione. Queste leggi sono fondate su dei principi generali che possono ridursi a tre: quello della leva, quello della composizione delle forze, e quello delle velocità virtuali.*

Quest'ultimo principio viene così enunciato da Lagrange:

> *Se un qualunque sistema di tanti punti e corpi quanti si voglia, ciascuno tirato da una qualunque potenza, è in equilibrio, e a questo sistema si dà un piccolo movimento qualsiasi, in virtù del quale ciascun punto percorre uno spazio infinitamente piccolo che esprimerà la sua velocità virtuale, la somma delle potenze moltiplicata ciascuna per lo spazio che il punto cui essa è applicata percorre lungo la direzione di questa stessa potenza, sarà sempre uguale a zero, riguardando come positivi i piccoli spazi percorsi nel senso della potenza e come negativi gli spazi percorsi in senso opposto.*

Coerentemente con l'obiettivo formulato nell'introduzione, Lagrange riconosce nel Principio delle Velocità Virtuali quello che meglio si presta allo sviluppo di un prodedimento analitico per la risoluzione dei problemi:

> *Ma questo principio è non solo in se stesso assai semplice e generale; esso ha di più il vantaggio prezioso e unico di potersi tradurre in una formula generale che racchiude tutti i problemi che si possano proporre sull'equilibrio dei corpi.*

Per esprimere questa formula, Lagrange designa con $P$, $Q$, $R$ etc. le forze che agiscono sui diversi punti secondo assegnate direzioni e denota con $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}r$ etc. le proiezioni lungo le direzioni delle forze di piccoli spostamenti che i punti possono compiere. Allora il Principio delle Velocità Virtuali si compendia nella relazione

$$P\,\mathrm{d}p + Q\,\mathrm{d}q + R\,\mathrm{d}r + \ldots = 0$$

che egli chiama *formula generale della Statica*. A partire da questa formula Lagrange sviluppa un metodo potenzialmente in grado di condurre alla soluzione di ogni problema di equilibrio. In primo luogo egli esprime i vincoli imposti ai punti del sistema per mezzo di un certo numero $k$ di *equazioni di condizione* nella forma

$$f_h(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots) = 0,$$

nelle quali $(x_i, y_i, z_i)$ sono le coordinate della posizione dell'$i$–simo punto in un qualche sistema di riferimento. Denotando allora con $(X_i, Y_i, Z_i)$ le componenti della forza risultante agente su quello stesso punto, la formula generale della statica assume l'espressione

$$\sum_i (X_i\,\mathrm{d}x_i + Y_i\,\mathrm{d}y_i + Z_i\,\mathrm{d}z_i) = 0\,, \tag{6.1}$$

dove $(\mathrm{d}x_i, \mathrm{d}y_i, \mathrm{d}z_i)$ rappresentano le componenti dello spostamento virtuale dell'$i$–mo punto le quali, tenuto conto delle equazioni di condizione, devono soddisfare il seguente sistema di equazioni

$$\begin{aligned} &\sum_i \Big(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i + \frac{\partial f_1}{\partial y_i}\,\mathrm{d}y_i + \frac{\partial f_1}{\partial z_i}\,\mathrm{d}z_i\Big) = 0, \\ &\sum_i \Big(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i}\,\mathrm{d}y_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i}\,\mathrm{d}z_i\Big) = 0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

che permette di esprimere $k$ dei differenziali $(\mathrm{d}x_i, \mathrm{d}y_i, \mathrm{d}z_i)$ in funzione dei restanti $3N - k$ (essendo $N$ il numero delle particelle che compongono il sistema), che rimangono arbitrari.

Siano adesso $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $k$ fattori arbitrari; tenendo conto della (6.1) e della (6.2), si vede che per ogni loro scelta risulta

$$\sum_i \left[ (X_i\,\mathrm{d}x_i + Y_i\,\mathrm{d}y_i + Z_i\,\mathrm{d}z_i) + \sum_h \lambda_h \left( \frac{\partial f_h}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i + \frac{\partial f_h}{\partial y_i}\,\mathrm{d}y_i + \frac{\partial f_h}{\partial z_i}\,\mathrm{d}z_i \right) \right] = 0.$$

L'indeterminazione dei fattori $\lambda_h$ può essere adoperata per annullare, in quest'ultima identità, i coefficienti dei $k$ differenziali dipendenti; perché essa risulti soddisfatta per ogni scelta dei $3N - k$ differenziali indipendenti è necessario che si annullino anche i restanti coefficienti. Si perviene così alle $3N$ equazioni

$$X_i + \sum_h \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_i} = 0,$$

$$Y_i + \sum_h \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial y_i} = 0,$$

$$Z_i + \sum_h \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial z_i} = 0,$$

le quali, assieme alle $k$ equazioni di condizione, consentono la determinazione dei $k$ moltiplicatori indeterminati e delle $3N$ coordinate delle configurazioni di equilibrio.

È interessante osservare come il procedimento suggerito da Lagrange introduca implicitamente delle nuove forze associate ai vincoli, aventi componenti

$$\left( \sum_h \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_i}, \sum_h \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial y_i}, \sum_h \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial z_i} \right),$$

che svolgono la funzione di equilibrare le forze applicate. Tali forze, le *reazioni vincolari*, sono necessariamente perpendicolari ai vincoli.

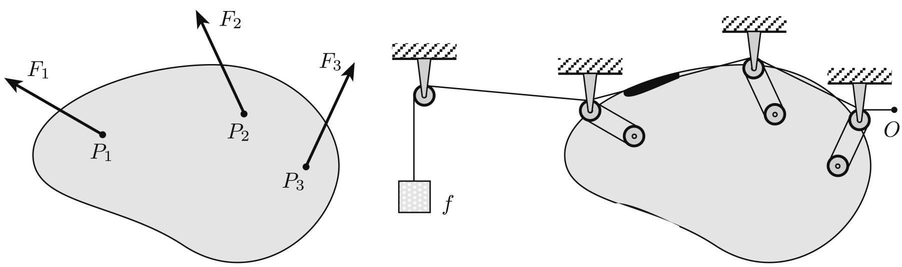
## 7. – Le dimostrazioni del Principio delle Velocità Virtuali

Il Principio delle Velocità Virtuali assurge con Lagrange al ruolo di principio fondamentale della statica, al pari di quelli della leva e della composizione delle forze; ed è, tra questi, il principio che meglio si presta a costituire un'espressione generale delle leggi dell'equilibrio e a fornire una formula da cui dedurre un metodo di risoluzione dei problemi particolari che di volta in volta si presentano. L'autore della *Mécanique Analitique* si spinge ad affermare che *tutti i principi ge-*

*nerali che potranno ancora scoprirsi nella scienza dell'equilibrio, non saranno che lo stesso principio delle velocità virtuali, riguardato diversamente, e dal quale non differiranno che per l'espressione.*

Eppure immediatamente dopo avere scritto queste parole, Lagrange osserva che *quanto alla natura del principio delle velocità virtuali, occorre convenire che esso non è tanto evidente in sé da potersi erigere a principio primitivo.* Dunque, Lagrange resta fedele all'idea che i principi primitivi di una teoria debbano possedere il requisito dell'evidenza e non riconosce tale requisito al Principio delle Velocità Virtuali. È questo il motivo che induce Lagrange a escogitare una dimostrazione del Principio delle Velocità Virtuali che lo riconduce a quello che egli chiama il *principio della puleggia*: *la combinazione di due pulegge, una fissa e l'altra mobile, avvolte da una corda di cui un'estremità è attaccata ad un punto fisso e l'altra è tirata da una forza, forma una macchina nella quale la forza sta al peso portato dalla puleggia mobile come l'unità sta al numero dei giri che avvolgono questa puleggia.*

Lagrange immagina un sistema meccanico costituito dei punti $P_1, P_2, \ldots$ nei quali sono rispettivamente applicate le forze $F_1, F_2, \ldots$ che suppone inizialmente tutte commensurabili, di modo che, denotata con $2f$ un loro comune denominatore, possa porsi $F_1 = 2n_1 f$, $F_2 = 2n_2 f, \ldots$ per opportuni valori dei numeri naturali $n_1, n_2, \ldots$ Egli colloca poi in ciascuno dei punti $P_1, P_2, \ldots$ una puleggia collegata, per mezzo di una staffa, a una seconda puleggia posta in un opportuno punto fisso dello spazio scelto lungo la retta di applicazione della forza




corrispondente Una corda inestendibile, avente un estremo in un punto fisso $O$ dello spazio, abbraccia $n_1$ volte la coppia di pulegge che corrisponde al punto $P_1$, $n_2$ volte quella che corrisponde al punto $p_2$ e così via; al secondo estremo della stessa è poi sospeso un corpo di peso $f$ che determina una tensione di pari valore in ogni punto della fune. In questo modo, ciascuno dei punti $P_1, P_2, \ldots$, in ossequio al principio della puleggia, è tirato da un forza pari al doppio del prodotto della tensione $f$ per il numero di avvolgimenti attorno alla carrucola; così, il dispositivo appena descritto consente di rimpiazzare, col solo peso $f$, tutte le forze originariamente applicate al sistema.

Supposto ora che il sistema sia in equilibrio in una data configurazione, se ne deduce che non può esistere alcuno spostamento dei punti $P_1, P_2, \ldots$, consentito dal dispositivo, che faccia scendere il peso $f$, poiché, se un tale spostamento esistesse, allora esso sarebbe effettivamente eseguito dal sistema che così non sarebbe in equilibrio. D'altra parte, non può esistere neppure uno spostamento dei punti in virtù del quale il peso $f$ possa salire, dal momento che, per la bilateralità dei vincoli imposti dal dispositivo, allora ne esisterebbe pure uno nel quale $f$ discenderebbe. In conclusione, quale che sia lo spostamento dei punti che costituiscono il sistema, questo deve lasciare inalterata la quota del peso $f$.

Affinché ciò sia possibile, denotati con $s_1, s_2, \ldots$ gli spostamenti dei punti misurati lungo le direzioni delle forze agenti su di essi, deve risultare

$$2n_1fs_1 + 2n_2fs_2 + \ldots = 0,$$

ovvero

$$F_1s_1 + F_2s_2 + \ldots = 0.$$

Quest'ultima identità coincide con la formulazione analitica del Principio delle Velocità Virtuali che è pertanto condizione necessaria per l'equilibrio del sistema.

Viceversa, se la precedente relazione è soddisfatta in ogni spostamento possibile del sistema, allora esso è in equilibrio: infatti, il peso $f$ lo è perché la sua quota è invariabile e i rimanenti punti lo sono in quanto non vi è ragione alcuna perché essi eseguano l'uno o l'altro fra i due spostamenti caratterizzati dai valori numerici $s_1, s_2, \ldots$ o dai loro opposti.

Lagrange conclude la propria dimostrazione osservando come, una volta provato il principio nel caso delle forze commensurabili, esso possa estendersi a quello generale per mezzo di un procedimento di riduzione ad assurdo.

La dimostrazione lagrangiana del Principio delle Velocità Virtuali si presta a qualche interessante considerazione. Essa si basa sulla sostituzione delle forze agenti su sistema con quelle generate da un dispositivo costituito da carrucole collegate a un peso; in virtù di tale sostituzione, l'affermazione che il Principio delle Velocità Virtuali è verificato per il sistema effettivo equivale pienamente a quella che esso è verificato per la macchina che ne ha preso il posto.

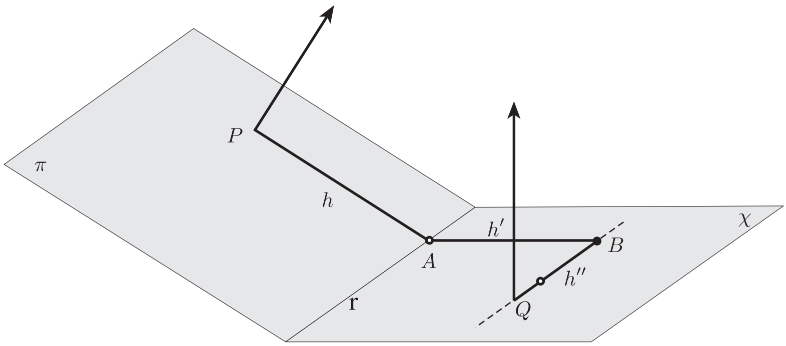
La necessarietà del Principio delle Velocità Virtuali per questo, più semplice, sistema è garantita dalla proprietà evidente secondo cui un grave che possa discendere effettivamente discenderà; la sufficienza è invece provata ricorrendo all'argomento logico della ragione sufficiente. Queste osservazioni fanno dire a Jouguet prima e a Colonnetti poi che la dimostrazione di Lagrange riveste carattere fisico, più che matematico.

Nei decenni successivi sono molti i fisici e i matematici che propongono nuove dimostrazioni con lo scopo di ridurre il Principio delle Velocità Virtuali a qualche altro principio della statica. Naturalmente non daremo conto di tutte queste dimostrazioni ma ci limiteremo a richiamarne due particolarmente interessanti. Nella prima di esse, pubblicata nel 1798 sul *Journal de l'Ecole Polytechnique* nella *Mémoire sur la Statique*, Joseph Fourier (1768–1830) riduce il Principio delle Velocità Virtuali a quello della leva.

Fourier considera un sistema composto di più punti su ciascuno dei quali agiscono differenti forze; preso lungo direzione di ciascuna forza un punto fisso cui la forza tende ad avvicinare il punto del sistema cui è applicata, egli chiama *momento* della forza il suo prodotto per la derivata della distanza tra il punto di applicazione e il punto fisso. Definito poi il concetto di vincolo (*equazione di condizione*) e operata la distinzione tra spostamenti possibili del sistema e spostamenti vietati dai vincoli, passa a enunciare il Principio delle Velocità Virtuali:

> *Ora il principio delle velocità virtuali consiste nel fatto che le forze che sollecitano un corpo di qualunque natura sia, supposte farsi equilibrio, il momemto totale è nullo per ciascuno degli spostamenti che soddisfano alle equazioni di condizione.*

La dimostrazione del Principio che esponiamo nelle sue linee essenziali è contenuta nella seconda delle tre parti di cui la memoria si compone. Essa si fonda sull'idea di sostituire il sistema reale con uno più semplice ma suscettibile dei medesimi spostamenti del primo per poi far discendere le condizioni di equilibrio del sistema originale da quelle del sistema che lo ha rimpiazzato. Fourier inizia col considerare una certa configurazione del sistema, in cui i punti che lo costituiscono occupano delle posizioni assegnate, e, a partire da essa, immagina un ben preciso spostamento compatibile con le equazioni di condizione.




Egli prende in esame due punti $P$ e $Q$ del sistema e per ciascuno di essi considera il piano perpendicolare alla velocità che essi hanno nello spostamento considerato; dal punto $P$ traccia la perpendicolare $h$ alla retta $r$ in cui i due piani si intersecano, e denota con $A$ l'intersezione con tale retta. Ancora, egli disegna da $A$ la perpendicolare $h'$ a $r$ e da $Q$ la perpendicolare $h''$ ad $h'$ e chiama $B$ il punto in cui tali rette si intersecano. Fourier riguarda allora $P$ e $B$ come gli estremi di una leva angolare con fulcro in $A$; è evidente che il movimento considerato del punto $P$ si trasmette, attraverso la leva, al punto $B$. Si immagini ora che anche i punti $B$ e $Q$ appartengano ad una stessa leva di modo che il movimento di $B$ si trasmetta a $Q$: con una scelta opportuna del fulcro di quest'ultima leva si può certamente ottenere che il movimento di $Q$ sia quello che gli compete nello spostamento del sistema che si sta considerando.

La costruzione appena descritta può estendersi a tutti i punti del sistema così da sostituire quello originale con uno nuovo in cui gli stessi punti sono collegati da un numero opportuno di leve che rendono possibile al sistema esclusivamente quel movimento che stiamo esaminando.

Se le forze cui sono soggetti i punti hanno momento nullo allora il sistema di leve è in equilibrio, come si verifica applicando il principio della leva; se ne conclude che queste stesse forze non possono produrre nel sistema originale quel medesimo movimento che esso ha in comune con il sistema di leve.

L'ultima dimostrazione del Principio delle Velocità Virtuali su cui ci soffermiamo è quella ideata da André Marie Ampère (1775–1836), pubblicata nel 1806 sul *Journal de l'Ecole Polytechnique*, fondata sulla *teoria della composizione e scomposizione delle forze applicate ad uno stesso punto*. Egli considera un sistema composto da un certo numero di punti $M_1, M_2, \dots$ che occupano posizione espresse dalle loro coordinate $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ in un riferimento ortonormale e sui quali agiscono le forze $P_1, P_2, \dots$. I punti sono collegati tra loro per mezzo di un certo numero di legami che creano una interdipendenza fra gli spostamenti che ciascuno di essi è libero di compiere e che si esprimono attraverso certe *equazioni di condizioni* il cui numero non può superare il numero totale delle coordinate dei punti diminuito di uno.

Ampère si pone inizialmente proprio in questo caso limite, proponendosi di ricondurre in un secondo momento ad esso quello più generale. Egli dunque assume che le condizioni siano pari al numero delle coordinate diminuito di uno, ovvero che il sistema abbia un grado di libertà. In tal caso tutte le coordinate si possono esprimere in funzione di una sola di esse o meglio, per maggior simmetria, in funzione di un unico parametro $u$. Ciò equivale a affermare che ciascun punto si muove su una curva assegnata.

Definito poi il *momento* come quella grandezza che, con linguaggio moderno, definiamo potenza della forza in corrispondenza alla velocità virtuale considerata, Ampère dà la sua formulazione del Principio delle Velocità Virtuali:

> *Si fa la somma dei momenti di tutte le forze applicate al sistema prendendo con segni contrari quelli le cui forze e loro proiezioni cadono dalla stessa parte, e quelli le cui forze e loro proiezioni cadono da parti opposte; si aggiunge a questa somma quella delle equazioni dedotte da tutte le equazioni*

*date, moltiplicate ciascuna per un fattore arbitrario e ridotte in modo che contengano in tutti i loro termini le derivate $x'$, $y'$, $z'$, alla prima potenza; si uguagliano separatamente a zero le quantità che moltiplicano ciascuna derivata e si eliminano tutti i fattori arbitrari; l'equazione o le equazioni rimanenti esprimeranno tutte le condizioni di equilibrio.*

La dimostrazione di Ampère del Principio delle Velocità Virtuali inizia con la considerazione che due forze sono del tutto equivalenti, ai fini del moto di un punto $M$ su una curva assegnata, se hanno la stessa proiezione lungo la tangente a tale curva. Ciò premesso, egli considera un secondo punto $N$ che si muove su una curva arbitraria sotto l'azione di una qualche forza diretta come si vuole e immagina di connettere questo secondo punto al primo per mezzo di un'asta inflessibile ed inestensibile. Ampère mostra allora che se questa forza ha il medesimo momento applicata ad $M$ allora la sua componente lungo l'asta, che si trasmette inalterata al primo punto, ha lo stesso momento della forza $P$ e può pertanto sostituirsi ad essa.

Questo risultato costituisce la necessaria premessa per ricondurre l'equilibrio di un sistema qualsiasi a un grado di libertà a quello di un particolare sistema e questo perché *vi è un caso in cui la legge dell'equilibrio è evidente in un sistema di forze applicate a punti i quali si possono muovere soltanto contemporaneamente in un modo determinato; questo avviene quando le condizioni sono tali da permettere a questi punti soltanto di scorrere, contemporaneamente e senza che le loro mutue distanze cambino, lungo la retta, secondo la quale sono dirette le forze che sono loro applicate. L'equilibrio richiede allora che la somma di queste forze, prendendo con segni contrari quelle che agiscono in sensi opposti, sia uguale a zero; e se questa condizione è soddisfatta, ne consegue necessariamente l'equilibrio.*

L'estensione al caso dei sistemi a più gradi di libertà si basa sull'idea di aggiungere al sistema ulteriori vincoli fino a ridurre a uno il numero dei gradi di libertà; l'arbitrarietà dei nuovi vincoli consente ad Ampère di ottenere la dimostrazione del Principio delle Velocità Virtuali sulla base di argomenti di carattere analitico.

Le riduzioni del Principio delle Velocità Virtuali a quello della puleggia, della leva, della composizione delle forze sono coerenti con l'idea, risalente ad Archimede, di fondare la statica come scienza autonoma basata su propri principi e da essi sviluppata. D'altra parte, nel 1687, Isaac Newton (1643–1727) pubblica i *Philosophiae naturalis principia mathematica*, opera nella quale enuncia le leggi che rendono possibile lo studio di tutti i fenomeni legati al movimento dei sistemi di punti e che costituiscono la base della meccanica moderna. E poiché la quiete può considerarsi come un particolare moto, quelle leggi pongono le premesse affinché la scienza della Statica possa inquadrarsi in quella della Dinamica, poggiandosi su di esse piuttosto che su un suo corpo di principi autonomi.

Un'analisi della letteratura scientifica successiva all'opera di Newton mostra come questo processo sia assai lento; ancora nel 1829 Karl Friederich Gauss (1777–1855) scrive che *ci si deve attendere che, quando la scienza avrà raggiunto un più alto livello, la Statica sarà presentata come un caso particolare della Dinamica.* Questa previsione di Gauss si avvera in larga misura nella seconda metà del XIX secolo – pur non senza incertezze, se è vero che ancora in qualche testo della prima metà del XX secolo la Statica è studiata indipendentemente dalla Dinamica. A partire da quell'epoca l'atteggiamento prevalente nello studio dell'equilibrio dei sistemi meccanici prevede che si analizzi lo stesso modello che descrive l'evoluzione di quei sistemi per cercarne le eventuali soluzioni stazionarie. In tale contesto il Principio delle Velocità Virtuali diviene una proprietà delle configurazioni di equilibrio da verificare una volta che tali configurazioni siano state determinate.

Nello studio dei sistemi di particelle libere le equazioni newtoniane del moto, combinate con le leggi di forza, si traducono in un sistema di equazioni differenziali le cui soluzioni sono i moti del sistema. Lo studio dell'equilibrio si riduce allora alla ricerca delle soluzioni costanti di quel sistema ed è un facile esercizio controllare l'equivalenza tra il Principio delle Velocità Virtuali e la condizione sulle leggi di forza che caratterizza le configurazioni di equilibrio.

Quando sul sistema agiscono dei vincoli, la povertà dello schema fisico, che trascura le piccole deformazioni che si manifestano in quegli oggetti – sbarre, superfici etc. – che li determinano, costringe ad annoverare certe forze, le reazioni vincolari, tra le incognite del problema. È allora chiaro che le sole equazioni newtoniane non possono risultare sufficienti alla determinazione del moto e delle reazioni vincolari. Occorre, in questo caso, in primo luogo tenere conto delle limitazioni che i vincoli pongono al sistema, traducendoli in sistemi di relazioni che esprimano la circostanza che i vincoli siano unilaterali o bilaterali, che essi limitino solo la mobilità del sistema o anche i suoi atti di moto, che dipendano o meno dal tempo. È poi necessario sopperire, almeno in parte, alla carenza di informazioni sulle reazioni vincolari; se infatti abbiamo rinunciato a collegare direttamente queste forze alle deformazioni che le determinano, ciò non toglie che queste forze debbano soddisfare ad alcuni requisiti generali di natura fenomenologica. Dobbiamo, in altri termini, pronunciarci sulle reazioni vincolari attraverso qualche proprietà costitutiva il cui ruolo, in sostanza, non è dissimile da quello giocato dalle leggi di forza per le sollecitazioni attive. È questo, appunto, il significato che va attribuito a quello che usualmente viene chiamato *postulato delle reazioni vincolari* che si riassume nella richiesta che la potenza delle reazioni vicolari sia non negativa in corrispondenza a ogni velocità virtuale del sistema.

In tale ipotesi, quando ci si limita a considerare vincoli posizionali e bilaterali espressi da funzioni sufficientemente regolari è ancora possibile ricondurre la determinazione dei moti all'integrazione di un sistema di equazioni differenziali, le equazioni di Lagrange, le cui soluzioni costanti individuano le configurazioni di equilibrio del sistema; anche in questo caso non è difficile controllare l'equivalenza fra la condizione di equilibrio e il Principio delle Velocità Virtuali. Più complessa è la situazione quando anche uno solo dei vincoli è unilaterale; in questo caso l'evoluzione del sistema meccanico è governata da un complesso di relazioni che contengono una o più disuguaglianze. Se una certa configurazione realizza le ipotesi che traducono il Principio delle Velocità Virtuali quelle relazioni sono certamente soddisfatte dalla soluzione di equilibrio; non è però possibile escludere a priori l'esistenza di altre soluzioni al di fuori di quella di quiete. Dimostrare il Principio delle Velocità Virtuali significa allora provare la non esistenza di soluzioni distinte da quella di equilibrio. Un'accurata indagine che gli autori hanno condotto alcuni anni addietro con Bruno Carbonaro sulla letteratura scientifica e didattica su questo argomento ha avuto esito negativo determinando in loro la convinzione che una tale dimostrazione non fosse ancora disponibile. Per tale motivo essi ne hanno proposta una ragionevolmente semplice in [4]. Il lettore interessato a tale dimostrazione può anche trovarla all'indirizzo web www.dimat.unina2.it/preprint/PVV.pdf.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] A. M. AMPÈRE, Démonstration générale du Principe des *Vîtesses Virtuelles dégagée de la considération des infiniment petits*, Journal de l'Ecole Politechnique, **13** (1806), 247-269.
[2] ARCHIMEDE, *Sull'equilibrio dei piani*, in *Opere*, a cura di A. Frajese, UTET (1974).
[3] ARISTOTELE, *Problemi Meccanici*, a cura di M.E. Bottecchia Dehò, Rubettino (2000).
[4] B. CARBONARO - G. STARITA, *The Principle of Virtual Velocities*. In *Classical Problems in Mechanics*, R. RUSSO ed., Quaderni di Matematica (Aracne), **1** (1997), 1-95.
[5] M. CLAGETT, *La Scienza della Meccanica nel Medioevo*, Feltrinelli (1972, 1981).
[6] G. COLONNETTI, *I Fondamenti della Statica*, UTET (1927).
[7] R. DUGAS, *Histoire de la Mécanique*, Griffon (1955).
[8] P. DUHEM, *Les Origines de la Statique*, (1905).
[9] C. FOURIER, *Mémoire sur la Statique contenant la démonstration du principle des vîtesses virtuelles et la théorie des momens*, Journal de l'Ecole Politechnique, **5** (1798), 20-60.
[10] J. L. LAGRANGE, *Mécanique Analytique*, Courcier, (I ed. 1788, II ed. 1811).
[11] G. VAILATI, *Il Principio di Lavori Virtuali da Aristotele a Erone d'Alessandria*, Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, **32** (1897).

Remigio Russo, Dipartimento di Matematica
Seconda Università di Napoli, Via Vivaldi, 43, 81100 - Caserta
e-mail: remigio.russo@unina2.it

Giulio Starita, Dipartimento di Matematica
Seconda Università di Napoli, Via Vivaldi, 43, 81100 - Caserta
e-mail: giulio.starita@unina2.it