
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

D. AMBROSI, A. BACCIOTTI, G. ROPOLO

La Matematica della Bicicletta

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1 (2008), n.3, p. 477–492.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_3_477_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica della Bicicletta

D. AMBROSI - A. BACCIOTTI - G. ROPOLO

Spesso per spiegare intuitivamente la differenza tra “posizione di equilibrio stabile” e “posizione di equilibrio instabile” di un sistema dinamico si fa ricorso all'esempio del pendolo. Il pendolo è infatti il più semplice sistema dinamico nonlineare che presenta due posizioni di equilibrio: quella in cui il baricentro si trova al di sotto dell'estremità vincolata dell'asta si dice *stabile* perché il pendolo se ne discosta di poco quando viene sottoposto a (piccole) perturbazioni, mentre l'altra, in cui il baricentro si trova al di sopra dell'estremità vincolata dell'asta, si dice *instabile* perché, a seguito di perturbazioni anche molto deboli, il pendolo entra in movimento e se ne allontana irrimediabilmente. In realtà, non è impossibile mantenere una posizione d'equilibrio instabile almeno per un po' di tempo agendo sul sistema in modo appropriato. Per contrastare l'effetto di eventuali perturbazioni ci vuole però una grande abilità: è essenzialmente questo che fanno gli acrobati negli spettacoli circensi.

Invece, quasi tutti siamo capaci di andare in bicicletta, magari anche senza mani; eppure la situazione è simile, in quanto anche nel caso della bicicletta il baricentro del sistema si trova al di sopra del vincolo, rappresentato dall'appoggio delle ruote sulla superficie del suolo. Fin da quando le biciclette hanno cominciato a diffondersi come mezzo di trasporto (tra la fine dell'ottocento e i primi del novecento) in molti hanno cercato di dare una spiegazione a questo fenomeno apparentemente paradossale. La letteratura sull'argomento è consistente, ma solo in epoca relativamente recente si è cercato di affrontare il problema in modo sistematico mettendo prima a punto modelli matematici ricavati in modo rigoroso per poi analizzarne le proprietà qualitative.

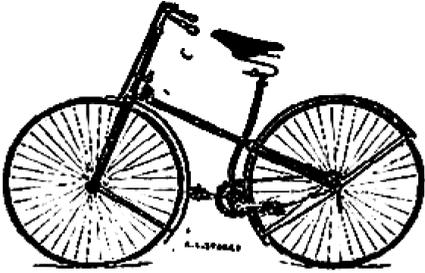
Le biciclette che si costruivano nella seconda metà dell'ottocento presentavano delle caratteristiche che, ai nostri occhi, appaiono curiose e stravaganti (si vedano le Figure 1 e 2): per esempio, la ruota anteriore della celebre *penny-farthing* era molto più grande della



Fig. 1. – Biciclo da corsa Renard, 1870-90. Museo Nazionale della Scienza e della Tecnologia “Leonardo da Vinci” di Milano.

“Cogent” Safety,
No. 18.

**Good Sound
Materials.**



**Cheapest & Best
Rear-driver made.**

PRICE £12 10s. 0d.
SEND FOR A LIST OF 20 CLASSES OF CYCLES.

✦ H. CLARKE, ✦
COGENT WORKS, DARLINGTON STREET, WOLVERHAMPTON.

Fig. 2. – Modello di bicicletta Safety-bicycle. Pubblicità della bicicletta Cogent Safety, Barkers Wolverhampton Trade Directory, 1887.

ruota posteriore e svolgeva la doppia funzione di ruota motrice e di ruota sterzante. I pedali erano montati direttamente sul pignone della ruota anteriore (cioè senza catena di trasmissione) e l’asse dello sterzo era fissato al telaio in posizione quasi verticale. Alla ben diversa configurazione attuale si è arrivati attraverso modifiche progressivamente apportate allo scopo di garantire maggiore sicurezza, comfort, manovrabilità, velocità e, appunto, stabilità; un processo sviluppatosi quasi sempre sulla base di considerazioni di tipo empirico.

Non intendiamo qui dilungarci sull’evoluzione storica della progettazione della bicicletta, argomento peraltro affascinante i cui dettagli sono facilmente reperibili sui numerosi siti internet dedicati al ciclismo. Non è neanche nostra intenzione scrivere un trattato completo sulla dinamica della bicicletta in tutti i suoi aspetti e in tutta la sua generalità o presentare in questa sede contributi originali. Ci proponiamo qui semplicemente di illustrare attraverso un esempio a tutti familiare come la matematica possa incontrarsi in un ambito

inaspettato e come essa possa essere usata per meglio comprendere il funzionamento di oggetti di uso comune e finanche migliorarne le caratteristiche in fase di progettazione. Strumenti matematici poco più che elementari applicati ad un modello assai semplice possano rivelarsi sorprendentemente efficaci. Rinviamo il lettore che desiderasse approfondire l'argomento al recente fascicolo del Magazine IEEE [1], quasi interamente dedicato alla progettazione e al controllo di veicoli a due ruote (biciclette e, soprattutto, motociclette), e alla letteratura ivi citata.

1. – La bicicletta come pendolo inverso

La dinamica della bicicletta può essere studiata sotto molti aspetti: ci si può ad esempio porre il problema di condurre il veicolo lungo una traiettoria assegnata. Noi restringiamo la nostra attenzione al problema della stabilità, che consiste nel cercare di capire come un ciclista dotato di un minimo di capacità e di esperienza riesca a mantenere la bicicletta in equilibrio, indipendentemente dalla traiettoria seguita.

Volendo tener conto di tutte le caratteristiche cinematiche e dinamiche del sistema "bicicletta-ciclista" bisogna introdurre un numero abbastanza elevato di variabili: in questa ottica, sono stati elaborati modelli matematici anche molto complessi, difficili da analizzare qualitativamente [5].

Nel seguito, noi ci atterremo al modello semplificato proposto in [2], costituito da un'equazione differenziale lineare del secondo ordine, al quale si arriva attraverso una serie di ipotesi semplificative. La prima di tali ipotesi riguarda il ciclista, che tratteremo come un corpo rigido solidale al telaio della bicicletta. In particolare, al ciclista non è permesso di inclinare il busto e l'unica azione che permette di correggere eventuali deviazioni dalla posizione d'equilibrio è la rotazione del manubrio.

Poiché la massa delle ruote è piccola rispetto a quella del telaio e dell'avantreno, per le tipiche velocità di avanzamento del veicolo possiamo trascurare nel modello matematico gli effetti giroscopici. Nonostante questa ipotesi vada contro una opinione assai diffusa, si tratta di una restrizione per nulla grave. La scarsa importanza degli

effetti giroscopici è stata dimostrata sia con argomenti di tipo dimensionale che per mezzo di ingegnosi esperimenti [3].

Un'altra semplificazione che faremo riguarda la posizione dell'asse dello sterzo. Nelle biciclette attuali, l'asse dello sterzo è posizionato in modo da formare un angolo di circa 20° con la verticale. Questo fatto non è casuale: è stato infatti verificato sperimentalmente e teoricamente che una bicicletta con l'asse dello sterzo verticale è più difficile da guidare. Tuttavia, se si vuol tener conto dell'inclinazione dell'asse dello sterzo rispetto alla verticale, la descrizione cinematica diventa più complessa e, coerentemente con i fini di questo articolo, l'asse della nostra bicicletta sarà nel seguito supposto essere in posizione verticale, come nelle biciclette più antiche.

2. – Cinematica

Nel presente contesto il sistema costituito dal telaio della bicicletta e dal ciclista viene rappresentato, in maniera semplificata, come un corpo rigido che si muove nello spazio tridimensionale, vincolato a rimanere in contatto con il piano orizzontale in due punti. Si tratta quindi di un sistema meccanico dotato di quattro gradi di libertà, la cui cinematica può essere descritta usando quattro coordinate libere indipendenti.

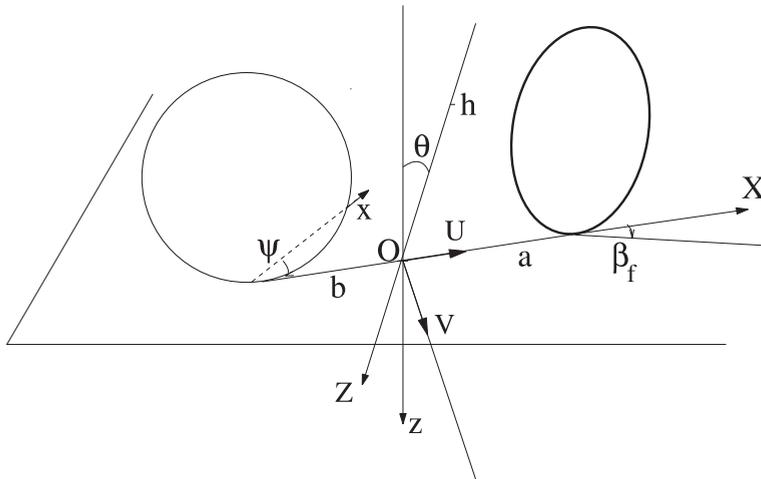


Fig. 3. – Coordinate libere per la descrizione di una bicicletta con ruota posteriore non sterzante ($\beta_r = 0$).

Indicheremo con (x, y, z) la terna di riferimento fissa. L'asse z è orientato con verso entrante nel suolo, cosicchè tutti gli angoli di rotazione nel piano orizzontale che verranno introdotti nel seguito sono misurati positivi in senso orario per un osservatore con i piedi per terra. Nella scrittura delle equazioni del moto è conveniente usare una terna mobile (X, Y, Z) solidale col telaio della bicicletta, la cui origine O coincide con la proiezione del baricentro sulla congiungente i due punti di contatto delle ruote col suolo (Figura 3).

Usiamo come coordinate libere la posizione di O nel piano orizzontale, l'angolo di rotazione θ intorno all'asse X (angolo di rollio) e la rotazione ψ intorno all'asse Z (angolo di imbardata). Coordinate libere alternative, che possono essere convenienti da un punto di vista del controllo, sono l'orientamento delle ruote anteriore e posteriore rispetto all'asse orizzontale della bici, che indichiamo con β_f e β_r , rispettivamente. Abbiamo inoltre bisogno di introdurre alcuni simboli che ci servono per rappresentare le principali caratteristiche fisico-geometriche della bicicletta:

- m = massa totale,
- h = altezza del baricentro (quando la bicicletta è in posizione verticale),
- I_X = momento d'inerzia relativo alle rotazioni della bicicletta attorno alla retta X ,
- a = distanza tra la proiezione del baricentro sull'asse X e il punto di contatto col suolo della ruota anteriore,
- b = distanza tra la proiezione del baricentro sull'asse X e il punto di contatto col suolo della ruota posteriore.

Per determinare come gli angoli β_f e β_r sono legati alle coordinate libere precedentemente introdotte, osserviamo che il punto O si muove con velocità (U, V) nel sistema di riferimento rotante dove, per definizione, la componente U , che assumiamo positiva e costante, è sempre orientata come l'asse orizzontale della bici (che non ha beccheggio). Se trascuriamo il caso in cui le ruote della bici possano slittare (*dérapiage*), i punti di contatto della bici con il suolo sono vincolati a muoversi nella direzione delle ruote stesse. Rappresentando la velocità dei punti di contatto delle ruote con la formula fondamentale del moto rigido a

partire da O , le velocità così calcolate devono avere componente nulla ortogonalmente alla direzione delle ruote. Da cui

$$(1) \quad \begin{aligned} U \sin \beta_f - (V + a\dot{\psi}) \cos \beta_f &= 0, \\ U \sin \beta_r - (V - b\dot{\psi}) \cos \beta_r &= 0. \end{aligned}$$

Usando queste relazioni cinematiche è per esempio possibile eliminare dalla descrizione del moto le velocità V e $\dot{\psi}$, che sono legate agli angoli di sterzata dalle relazioni

$$(2) \quad \begin{aligned} V &= \frac{U}{a+b} (b \tan \beta_f + a \tan \beta_r), \\ \dot{\psi} &= \frac{U}{a+b} (\tan \beta_f - \tan \beta_r). \end{aligned}$$

3. – Equazioni del moto

Le equazioni del moto del sistema meccanico semplificato con il quale abbiamo scelto di rappresentare la bicicletta possono essere dedotte seguendo due approcci: la scrittura diretta delle equazioni vettoriali di bilancio delle forze o la loro deduzione a partire da un principio variazionale. Non essendo qui interessati a determinare le reazioni vincolari del sistema, noi seguiamo questa seconda strada, che permette di mantenere le equazioni in forma compatta fino alla loro esplicitazione. Il vantaggio di calcoli più semplici si manifesta soprattutto nel caso di forcella inclinata (che qui non consideriamo), dove la cinematica diventa particolarmente intricata.

La velocità del baricentro della bicicletta è ottenuta sommando vettorialmente alla velocità del punto O i contributi rotazionali di rollio e imbardata. Si ottiene quindi

$$(3) \quad \mathbf{v} = \left(U - h\dot{\psi} \sin \theta, V + h\dot{\theta} \cos \theta, h\dot{\theta} \sin \theta \right)^T.$$

Le velocità angolari $(\dot{\theta}, \dot{\psi})$ non sono orientate come gli assi principali d'inerzia, per cui è necessario decomporle in tali direzioni per poter agevolmente scrivere il contributo all'energia cinetica dovuto alla rotazione intorno al baricentro. Sulla base di semplici considerazioni

geometriche si ottiene

$$(4) \quad \begin{aligned} \omega_X &= \dot{\theta}, \\ \omega_Y &= -\dot{\psi} \sin \theta, \\ \omega_Z &= \dot{\psi} \cos \theta. \end{aligned}$$

dove $(\omega_X, \omega_Y, \omega_Z)$ sono le componenti della velocità angolare del corpo rigido nella terna solidale ad esso. L'energia cinetica del sistema si scrive

$$(5) \quad T = \frac{m}{2} v^2 + \frac{1}{2} [I_X \omega_X^2 + I_Y \omega_Y^2 + I_Z \omega_Z^2],$$

dove I_X, I_Y, I_Z sono i momenti principali d'inerzia della bicicletta rispetto al baricentro che, per ovvie ragioni di simmetria, sono orientati come gli assi della terna mobile. In termini delle coordinate libere la (5) si scrive

$$(6) \quad \begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \left(U^2 + V^2 + h^2 \dot{\theta}^2 + h^2 (\dot{\psi} \sin \theta)^2 + 2hV\dot{\theta} \cos \theta - 2hU\dot{\psi} \sin \theta \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left[I_X \dot{\theta}^2 + I_Y (\dot{\psi} \sin \theta)^2 + I_Z (\dot{\psi} \cos \theta)^2 \right], \end{aligned}$$

mentre l'energia potenziale ha la semplice forma

$$(7) \quad E_p = mgh \cos \theta$$

dove abbiamo indicato con g l'accelerazione di gravità. Avendo determinato l'espressione dell'energia totale in funzione dei parametri e delle coordinate libere, possiamo dedurre le equazioni del moto. In particolare, l'equazione di Lagrange per l'angolo di rollio θ si scrive

$$(8) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} (T - E_p) = \frac{\partial}{\partial \theta} (T - E_p),$$

o, esplicitamente,

$$(9) \quad \begin{aligned} (mh^2 + I_X) \ddot{\theta} &= mgh \sin \theta - mh \cos \theta (\dot{V} + U\dot{\psi}) \\ &+ \dot{\psi}^2 \frac{\sin 2\theta}{2} (I_Y - I_Z + mh^2). \end{aligned}$$

Facendo uso delle (2), a questo punto possiamo far intervenire le variabili β_f e β_r in luogo di \dot{V} e $\dot{\psi}$. Concentriamo la nostra attenzione sulla posizione di equilibrio $\theta = \dot{\theta} = 0$. Poiché siamo ragionevolmente

interessati a piccole deviazioni rispetto alla posizione d'equilibrio, linearizziamo l'equazione trascurando i termini di ordine superiore al primo. Infine, con l'ulteriore restrizione ⁽¹⁾ $\beta_r = 0$, dalla (9) si ottiene

$$(10) \quad (mh^2 + I_X)\ddot{\theta} = mgh\theta - \frac{mhU}{a+b} (b\dot{\beta}_f + U\beta_f) .$$

4. – La bicicletta come sistema dinamico

In Teoria Matematica dei Controlli, per descrivere un sistema si usano tre tipi di variabili: le variabili di stato, le variabili di uscita, le variabili di controllo.

Le variabili di stato rappresentano il complesso delle grandezze fisiche coinvolte nell'evoluzione del sistema. Le variabili di uscita sono quelle direttamente osservate e misurate dall'operatore. Le variabili di controllo sono quelle su cui l'operatore può agire per correggere, in base a qualche criterio prestabilito, l'evoluzione del sistema.

Le equazioni che legano tutte queste variabili, nel nostro caso la (10), costituiscono il modello del sistema. Più precisamente, per noi la *variabile di stato* sarà data dalla coppia costituita dall'angolo di rollio θ e dalla sua variazione prima (cioè dalla sua derivata) $\dot{\theta}$, l'operatore è il ciclista e la *variabile osservata* coincide con l'angolo di rollio θ .

Quando l'equilibrio viene perturbato, come abbiamo già spiegato, il ciclista può tentare di recuperarlo solo agendo sul manubrio, in quanto stiamo supponendo che il suo corpo si mantenga rigidamente solidale col telaio della bici. L'angolo β_f si configura quindi come *variabile di controllo*.

Il fatto che nella (10) compaia la derivata del controllo rende però poco agevole il suo inquadramento, rispetto all'impostazione classica della Teoria Matematica dei Controlli. Si può aggirare l'ostacolo attraverso le sostituzioni

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta},$$

⁽¹⁾ Assumere $\beta_r = 0$ equivale a supporre che l'unica ruota sterzante sia quella anteriore, che è il caso delle comuni biciclette; biciclette a trazione anteriore e ruota posteriore sterzante sono state progettate e costruite in via sperimentale.

$$u = -\frac{mhU}{(a+b)(mh^2 + I_X)} (b\dot{\beta}_f + U\beta_f),$$

$$y = -\frac{mhU}{(a+b)(mh^2 + I_X)} (b\dot{\theta} + U\theta)$$

grazie alle quali si arriva a mettere la (10) sotto forma di sistema

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{mgh}{mh^2 + I_X} x_1 + u \\ y = -\frac{mhU}{(a+b)(mh^2 + I_X)} (Ux_1 + bx_2) \end{cases}$$

che è molto più conveniente per i nostri scopi. Studiando la (11) con i metodi della Teoria Matematica dei controlli si possono evidenziare alcune proprietà importanti.

1. Per ogni assegnazione dei parametri m, h, a, b, U, I_X , il sistema è *completamente controllabile*: ciò significa che, agendo opportunamente sul controllo, si può far assumere alle variabili di stato valori scelti ad arbitrio.

2. Eccetto il caso in cui

$$(12) \quad U^2 = \frac{mghb^2}{(mh^2 + I_X)},$$

il sistema è *completamente osservabile*: ciò significa che dall'osservazione dell'uscita su un certo intervallo di tempo, è possibile risalire a tutte le informazioni essenziali relative all'evoluzione dello stato.

L'eventuale verificarsi della (12) si traduce di fatto in una perdita di informazione sul comportamento dinamico dello stato del sistema: tuttavia, per un caso fortunato, quella parte del sistema che rimane inaccessibile all'osservatore si comporta in maniera stabile. Di conseguenza, gli sviluppi successivi mantengono la loro validità, indipendentemente dalla condizione (12).

5. – Analisi della stabilità

Affrontiamo adesso la discussione sulla stabilità della posizione d'equilibrio dell'equazione (10), cercando di capire prima di tutto come si comporta il sistema in assenza di controllo. Per noi, questo significa imporre $\beta_f = \dot{\beta}_f = 0$, ovvero supporre che lo sterzo venga bloccato. L'equazione (10) si riduce a

$$(13) \quad (mh^2 + I_X)\ddot{\theta} = mgh\theta,$$

e non è difficile vedere che una delle due radici del polinomio caratteristico è positiva: questo implica l'esistenza di soluzioni della (13) che diventano arbitrariamente grandi al trascorrere del tempo. Come ci si poteva immaginare, l'equilibrio è instabile. In queste condizioni il ciclista non ha quindi nessuna speranza di rimanere a lungo in equilibrio: una minima perturbazione può trasformarsi in una rovinosa caduta.

Supponiamo invece che il ciclista decida di cercare di contrastare la perdita dell'equilibrio operando sul manubrio una rotazione di un angolo β_f concorde con l'angolo con cui il mezzo si sta inclinando. In prima approssimazione, è ragionevole supporre che β_f sia proporzionale a θ , ovvero che

$$(14) \quad \beta_f = k\theta,$$

dove k è un numero reale positivo. In Teoria dei controlli, una funzione che rende il controllo dipendente dalla variabile osservata si dice una *retroazione statica dell'uscita* e il coefficiente di proporzionalità k si dice *guadagno* ⁽²⁾. A parità di perturbazione θ , la rotazione impressa al manubrio sarà pertanto tanto maggiore quanto più grande è k .

⁽²⁾ Ipotizzando che il controllo sia della forma (14) stiamo anche implicitamente supponendo che il ciclista sia in grado di rispondere istantaneamente alle variazioni dell'angolo di rollio. Questo naturalmente non è vero, ma indagini di tipo neurofisiologico hanno dimostrato che per il tipo di azione richiesto in questo caso all'operatore umano, il ritardo è ragionevolmente trascurabile rispetto ai tempi tipici di variazione del sistema meccanico che, come si può ricavare dalla (13), sono dell'ordine di un secondo.

Con l'ipotesi (14) si rinuncia a cercare di determinare una dinamica dell'angolo di sterzata che sia indipendente dall'azione del ciclista, coerentemente con l'attitudine semplificativa di questo articolo. All'interno del modello studiato nel presente lavoro rinunciamo perciò a verificare se una bicicletta può procedere senza guidatore, cioè senza controllo attivo ma solo in base ad autostabilizzazione ad una velocità sufficientemente alta, cosa che si potrebbe verificare con un modello leggermente più complesso.

Si noti che, essendo il sistema considerato completamente controllabile, la teoria generale assicura l'esistenza di una retroazione stabilizzante dello stato, cioè della forma $\beta_f k_1 \theta + k_2 \dot{\theta}$. Anzi, si prova che scegliendo opportunamente le costanti k_1, k_2 , si può far in modo che le radici dell'equazione caratteristica abbiano parte reale negativa e arbitrariamente grande in valore assoluto.

Sfortunatamente nel nostro caso una retroazione di questa natura non è ipotizzabile, in quanto è plausibile che il ciclista abbia la percezione dell'angolo θ (la bicicletta che si inclina) ma non quella di $\dot{\theta}$.

Il problema dell'esistenza di retroazioni dell'uscita è molto più intricato rispetto a quello dell'esistenza di retroazioni dello stato; anzi, in larga misura, si tratta di un problema aperto. L'esistenza di una retroazione statica dell'uscita potrebbe essere dedotta da certi risultati di carattere generale [6]. Tuttavia, visto che l'ordine dell'equazione è molto basso, conviene procedere ad una verifica diretta.

Sostituendo la (14) nell'equazione (10), si ottiene

$$(15) \quad (mh^2 + I_X)\ddot{\theta} - k \frac{mhbU}{a+b} \dot{\theta} - mh \left(\frac{kU^2}{a+b} - g \right) \theta .$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché la posizione di equilibrio $\theta = \dot{\theta} = 0$ sia stabile è che le radici dell'equazione caratteristica della (15) siano entrambe con parte reale negativa. Con semplici calcoli, si arriva allora alla seguente importante conclusione.

THEOREM 1. - *L'equilibrio $\theta = \dot{\theta} = 0$ è stabile se e solo se*

$$(16) \quad k > \frac{(a+b)g}{U^2} .$$

L'asserto del Teorema 1 è coerente con l'esperienza quotidiana: se la velocità della bicicletta è sufficientemente elevata, per mantenersi in equilibrio, il ciclista può limitarsi ad imprimere allo sterzo rotazioni molto piccole. Al diminuire della velocità, la soglia richiesta per il coefficiente k aumenta: per mantenersi in equilibrio è necessario imprimere allo sterzo rotazioni più grandi.

A questo risultato si fermano quasi tutti gli autori che hanno studiato il comportamento della bicicletta sulla base del modello (10) (si veda in particolare [2]). Spingendosi un po' più avanti, si deducono altre informazioni interessanti.

Ci proponiamo in particolare di discutere, al variare di k , il comportamento del massimo tra le parti reali delle radici caratteristiche della (15), ferma restando la condizione (16). Distinguiamo due casi.

Caso 1: $U^2 < \frac{mghb^2}{mh^2 + I_X}$ (condizione che si verifica quando la velocità

è piccola). Le radici caratteristiche sono reali. La più grande delle due è nulla per $k = (a + b)g/U^2$; essa decresce al crescere di k e tende asintoticamente al valore $-U/b$.

Caso 2: $U^2 > \frac{mghb^2}{mh^2 + I_X}$ (condizione che si verifica quando la velocità

è abbastanza grande). Adesso ci sono due valori k_1 e k_2 , entrambi più grandi di $(a + b)g/U^2$, tali che le radici caratteristiche sono complesse coniugate se k sta nell'intervallo (k_1, k_2) , reali altrove. Indichiamo per comodità con $\mu(k)$ il massimo tra le parti reali delle radici caratteristiche. La funzione $\mu(k)$ ha qualitativamente l'andamento mostrato nella Figura 4a. Si ha quindi un minimo assoluto per $k = k_2$. Tale valore di k si configura quindi come "ottimo", nel senso che se il ciclista è capace di imprimere allo sterzo una rotazione pari esattamente a $k_2\theta$, allora viene garantita non solo la stabilità, ma anche la massima rapidità consentita nell'ammortizzazione delle perturbazioni.

Vi è ancora un'importante osservazione da fare, a proposito del

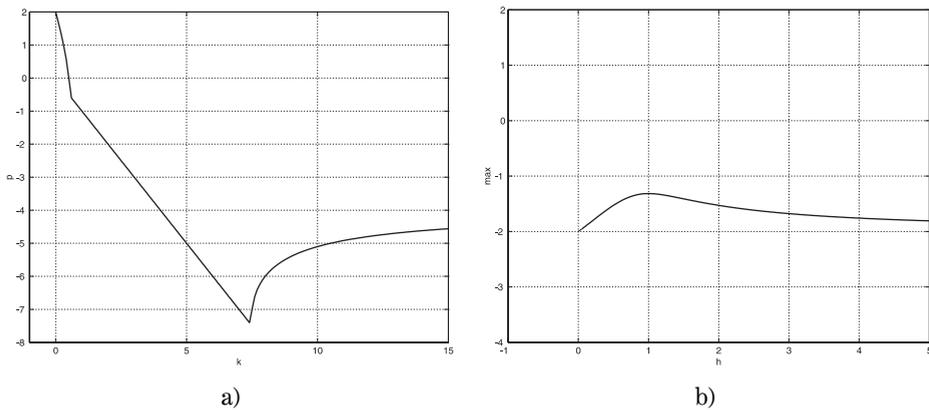


Fig. 4. – Smorzamento del sistema in funzione di k (a sinistra) e di h (a destra).

valore della funzione $\mu(k)$ per $k = k_2$. Questo valore è dato da

$$-\frac{U}{b} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{mgh}{mh^2 + I_X U^2} \frac{b^2}{U^2}} \right).$$

Esso non può essere modificato dal ciclista, ma può costituire un criterio di cui tener conto nella progettazione. È infatti chiaro che è conveniente, ai fini della stabilità, scegliere i parametri in modo che il valore del minimo sia il più piccolo possibile. Per migliorare le prestazioni della bicicletta, è consigliabile quindi costruirla in modo che b sia piccolo, mentre h sia piccolo o grande (il grafico qualitativo di $\mu(k_2)$ come funzione di h è mostrato nella Figura 4b). Naturalmente, compito del progettista sarà anche quello di trovare un compromesso tra queste indicazioni e la considerazione di altri aspetti che potrebbero dare indicazioni di segno contrario.

6. – Conclusioni

Il semplice modello sviluppato in questo lavoro coinvolge competenze di tipo interdisciplinare, che vanno dalla Fisica Matematica, per la descrizione del sistema dal punto di vista cinematico e dinamico, alla Teoria Matematica dei Controlli, per l'analisi della stabilità e la co-

struzione di retroazioni stabilizzanti, fino al Calcolo Numerico, per le eventuali simulazioni.

Il modello (10) presenta un certo numero di vantaggi: è semplice e può essere facilmente interpretato dal punto di vista della Teoria Matematica dei Controlli⁽³⁾. Ha però anche dei limiti evidenti: per esempio, non permette di spiegare come mai si possa andare in bicicletta anche “senza mani” né, tantomeno, come una bicicletta, spinta ad una velocità sufficientemente elevata, riesca a conservare l’equilibrio per un tratto molto più lungo di quello che si potrebbe immaginare, anche senza nessuno in sella.

Lo studio della stabilità è stato sviluppato con riferimento alla posizione d’equilibrio per cui $\theta = 0$: questa scelta equivale a supporre che la bicicletta stia procedendo secondo una traiettoria rettilinea. Utilizzando l’equazione di Lagrange nella variabile ψ ci si accorge che, anche se la bicicletta sta svoltando, esiste almeno un’altra posizione di equilibrio, che corrisponde fisicamente alla configurazione in cui il momento dovuto alla forza centrifuga bilancia quello dovuto alla forza peso. In questa posizione d’equilibrio, la forma linearizzata delle equazioni risulta però più complicata.

Una descrizione più completa del problema dovrebbe infine includere lo spostamento indipendente del busto del ciclista, effetti giroscopici, attriti e inclinazione della forcella. Ci sembra tuttavia che già questo modello elementare metta in luce gli affascinanti aspetti matematici di un mezzo di trasporto così comune, dal funzionamento apparentemente semplice ma in realtà assai complesso.

BIBLIOGRAFIA

- [1] *Advances in Motorcycle Design and Control*, IEEE Control Systems Magazine, **26** (5) October 2006.
- [2] K. J. ÅSTRÖM - R. E. KLEIN - A. LENNARTSSON, *Bicycle Dynamics and Control*, IEEE Control Systems Magazine, **25** (4) (August 2005), 26-47.

⁽³⁾ Il lettore che desiderasse avviarsi allo studio della Teoria Matematica dei Controlli ha a sua disposizione una vasta gamma di manuali; tra quelli in italiano, si può per esempio far riferimento a [4].

- [3] D. E. H. JONES, *The Stability of the bicycle*, Physics Today (April 1970), 34-40.
- [4] G. MARRO, *Teoria dei sistemi e del controllo*, Zanichelli, Bologna, 1989.
- [5] A. L. SCHWAB - J. P. MEIJAARD - J. M. PAPADOPOULOS, *Benchmark Results on Linearized Equations of Motion of an uncontrolled bicycle*, Proceedings of the 2nd Asian Conference on Multibody dynamics, Seoul, Corea, 2005.
- [6] V. L. SYRMOS - C. T. ABDALLAH - P. DORATO - K. GRIGORIADIS, *Static Output Feedback - A Survey*, Automatica **33** (2) (1997), 125-137.

Davide Ambrosi, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino
e-mail: ambrosi@calvino.polito.it

Andrea Bacciotti, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino
e-mail: andrea.bacciotti@polito.it

Giovanni Ropolo, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino
e-mail: s142847@studenti.polito.it