La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Filippo Viviani

Deformazioni di algebre di Lie semplici ristrette

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 371–374.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_371_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 371-374

Deformazioni di algebre di Lie semplici ristrette

FILIPPO VIVIANI

1. – Algebre di Lie semplici ristrette.

Le algebre di Lie semplici su un campo algebricamente chiuso di *caratteristica zero* sono state classificate agli inizi del XIX secolo da Killing e Cartan. La classificazione procede nel modo seguente: per prima cosa si dimostra che la forma di Killing è non degenere e, usando ciò, si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le algebre di Lie semplici e i sistemi di radici irriducibili; successivamente i sistemi di radici irriducibili sono classificati in funzione dei diagrammi di Dynkin a loro associati. La classificazione finale è la seguente: esistono 4 famiglie infinite di algebre di Lie semplici, e cioè l'algebra lineare speciale $\mathfrak{sl}(n+1)$, l'algebra ortogonale speciale di rango dispari $\mathfrak{so}(2n+1)$, l'algebra simplettica $\mathfrak{sp}(2n)$ e l'algebra speciale ortogonale di rango pari $\mathfrak{so}(2n)$, e 5 algebre di Lie eccezionali corrispondenti ai diagrammi di Dynkin eccezionali E_6, E_7, E_8, F_4 e G_2.

Le algebre semplici in caratteristica zero possono essere definite sugli interi (via basi di Chevalley) e poi ridotte modulo un primo p. Le algebre di Lie modulari (cioè definite sopra un campo di caratteristica positiva) semplici che si ottengono in questo modo sono chiamate algebre di Lie modulari *di tipo classico*.

Queste algebre di Lie modulari semplici hanno una forma di Killing degenere nei primi p che dividono il discriminante della forma di Killing intera.

Il primo esempio di algebra di Lie modulare non di tipo classico è dovuto a Witt, che nel 1937 scoprì che l'algebra delle derivazioni $W(1) := \mathrm{Der}_F F[X]/(X^p)$ su un campo F di caratteristica $p \neq 2$ è semplice con forma di Killing sempre degenere. Nei successivi tre decenni, molte algebre di Lie modulari semplici non di tipo classico furono scoperte, fino a quando nel 1966 Kostrikin-Shafarevich ([3]) unificarono gli esempi fino ad allora noti costruendo certe algebre di Lie modulari semplici che sono gli analoghi, in dimensione finita e in caratteristica positiva, delle algebre di Lie complesse semplici di dimensione infinita, che occorrono nella classificazione di Cartan degli pseudogruppi di Lie.

Queste algebre di Lie semplici, dette di *tipo Cartan*, sono divise in quattro famiglie chiamate algebre di Witt-Jacobson, algebre Speciali, algebre Hamiltoniane e algebre di Contatto. Le algebre di Witt-Jacobson $W(n)$ sono algebre di derivazione delle algebre polinomiali p-troncate in n variabili, e cioè

$$W(n) = \mathrm{Der}_F F[x_1, \cdots, x_n]/(x_1^p, \cdots, x_n^p).$$

Per definire le rimanenti tre famiglie, consideriamo l'azione naturale di $W(n)$ sull'algebra esterna delle forme differenziali in $\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_n$ a coefficienti in $A(n) := F[x_1, \cdots, x_n]/ (x_1^p, \cdots, x_n^p)$. Consideriamo le seguenti tre forme differenziali, chiamate forma di volume, forma hamiltoniana e forma di contatto:

$$\begin{cases} \omega_S = \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \mathrm{d}x_n, \\ \omega_H = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_{i+m} \text{ se } n = 2m, \\ \omega_K = \mathrm{d}x_{2m+1} + \sum_{i=1}^{m} (x_{i+m}\mathrm{d}x_i - x_i \mathrm{d}x_{i+m}) \text{ se } n = 2m+1. \end{cases}$$

L'algebra Speciale $S(n)$ $(n \geq 3)$, l'algebra Hamiltonianana $H(n)$ $(n = 2m \geq 2)$ e l'algebra di Contatto $K(n)$ $(n = 2m + 1 \geq 3)$ sono definite come le algebre derivate del secondo ordine delle seguenti tre sottoalgebre di $W(n)$:

$$\begin{cases} \widetilde{S}(n) = \{D \in W(n) | D\omega_S = 0\}, \\ \widetilde{H}(n) = \{D \in W(n) | D\omega_H = 0\}, \\ \widetilde{K}(n) = \{D \in W(n) | D\omega_K \in A(n)\omega_K\}. \end{cases}$$

Tutte le algebre di Lie modulari semplici descritte sopra appartengono ad una classe di algebre di Lie modulari chiamate *ristrette* (o p-algebre). Queste algebre di Lie sono munite di una mappa $x \mapsto x^{[p]}$ che possiede proprietà analoghe alla mappa che manda una derivazione nella sua potenza p-esima. In particolare, questa mappa verifica la fondamentale proprietà

$$\mathrm{ad}(x)^p = \mathrm{ad}(x^{[p]}).$$

Viceversa, se un'algebra di Lie modulare L è tale che $\mathrm{ad}(x)^p$ è ancora una derivazione interna per ogni elemento $x \in L$, allora L può essere dotata di una struttura di algebra di Lie ristretta, che per di più è unica se L ha centro banale. Molte delle algebre che si incontrano naturalmente sono ristrette, per esempio: l'algebra di derivazione di un'algebra associativa, le algebre di Lie corrispondenti a sottoestensioni di un'estensione di campi puramente inseparabile di esponente uno, gli elementi primitivi di un'algebra di Hopf cocommutativa irriducibile e le algebre di Lie associati a schemi in gruppi.

Kostrikin e Shafarevich (nel sopra citato articolo [3]) congetturarono che tutte le algebre semplici ristrette sono di tipo classico o tipo Cartan su un campo algebricamente chiuso di caratteristica $p > 5$. La *congettura di Kostrikin-Shafarevich* è stata dimostrata nel 1988 da Block-Wilson (in [1]) per $p > 7$. Più recentemente, Premet e Strade ([4]) hanno completato la congettura nel caso $p = 7$ e, inoltre, hanno dimostrato che per $p = 5$ oltre alle sopra descritte algebre di Lie c'è un'unica algebra semplice ristretta eccezionale, chiamata algebra di

Melikian. In caratteristica $p = 2, 3$, ci sono molte algebre di Lie ristrette semplici (si veda per esempio [6, page 209]) e la classificazione sembra ancora lontana.

2. – Deformazioni di algebre di Lie.

Lo scopo della mia tesi è stato quello di calcolare le *deformazioni infinitesimali* delle algebre di Lie semplici ristrette.

Per definizione, una deformazione infinitesimale di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ su un campo F è un'algebra di Lie $\mathfrak{g}'$ su $F[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ tale che $\mathfrak{g}' \times_{F[\varepsilon]/(\varepsilon^2)} F \cong \mathfrak{g}$. Esplicitamente, $\mathfrak{g}'$ è uguale come spazio vettoriale a $\mathfrak{g} + \varepsilon\mathfrak{g}$ e il bracket di Lie $[-, -]'$ di $\mathfrak{g}'$ verifica la seguente proprietà (per ogni $X, Y \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}'$):

$$[X, Y]' = [X, Y] + \varepsilon f(X, Y),$$

dove $[\,-\,.\,-\,]$ è il bracket di Lie di $\mathfrak{g}$ e $f(-, -)$ è una funzione 2-alternante da $\mathfrak{g}$ a $\mathfrak{g}$, considerato come modulo su se stesso tramite la rappresentazione aggiunta. L'identità di Jacobi per $[-, -]'$ si traduce nel fatto che f è un cociclo e inoltre si verifica facilmente che due cocicli che differiscono per un cobordo definiscono algebre di Lie isomorfe. Pertanto le deformazioni infinitesimali di un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ sono parametrizzate dal secondo gruppo di coomologia $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ di $\mathfrak{g}$ a valori nella rappresentazione aggiunta.

È un classico risultato di Whitehead che un'algebra di Lie semplice sopra un campo di caratteristica zero è rigida, cioè non ammette deformazioni infinitesimali. Rudakov ([5]) ha dimostrato che le algebre ristrette semplici di tipo classico sono rigide in caratteristica $p \geq 5$, mentre Chebochko-Kuznetsov ([2]) hanno mostrato che ci sono deformazioni non banali se $p = 2, 3$.

Nella mia tesi, ho calcolato le deformazioni infinitesimali delle algebre di Lie ristrette semplici di tipo Cartan e dell'algebra di Melikian, mostrando che esse non sono mai rigide. In particolare ho calcolato la dimensione del secondo gruppo di coomologia a valori nella rappresentazione aggiunta fornendo anche generatori espliciti. I risultati ottenuti riguardo alla dimensione sono i seguenti:

TEOREMA 1. – *Sia $n \geq 1$ e assumiamo che $p = \mathrm{char}(F) \neq 2$. Allora si ha che*

$$\dim_F H^2(W(n), W(n)) = n,$$

con l'eccezione del caso $n = 1$ e $p = 3$ quando la dimensione è 0.

TEOREMA 2. – *Sia $n \geq 3$ e assumiamo che $p = \mathrm{char}(F) \neq 2$ e inoltre che $p \neq 3$ se $n = 3$. Allora si ha che*

$$\dim_F H^2(S(n), S(n)) = n + 1.$$

TEOREMA 3. – *Sia* $n = 2m + 1 \geq 3$ *e assumiamo che* $p = \mathrm{char}(F) \neq 2, 3$. *Allora si ha che*

$$\dim_F H^2(K(n), K(n)) = n.$$

TEOREMA 4. – *Sia* $n = 2m \geq 2$ *e assumiamo che* $p = \mathrm{char}(F) \neq 2, 3$. *Allora si ha che*

$$\dim_F H^2(H(n), H(n)) = \begin{cases} n + 1 + \binom{n}{2} & \text{se } n \geq 4, \\ 3 & \text{se } n = 2. \end{cases}$$

TEOREMA 5. – *Sia* $p = \mathrm{char}(F) = 5$ *e* M *l'algebra di Melikian. Allora si ha che*

$$\dim_F H^2(M, M) = 5.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] BLOCK R. E., WILSON R. L., *Classification of the restricted simple Lie algebras*, J. Algebra, **114** (1988), 115-259.

[2] CHEBOCHKO N. G., KUZNETSOV M. I., *Deformations of classical Lie algebras*, Sb. Math., **191** (2000), 1171-1190.

[3] KOSTRIKIN A. I., SHAFAREVICH I. R., *Cartan's pseudogroups and the p-algebras of lie*, Soviet Math. Dokl., **7** (1966), 715-718.

[4] PREMET A., STRADE H., *Simple Lie algebras of small characteristic. IV. Solvable and classical roots*, J. Algebra, **278** (2004), 766-833.

[5] RUDAKOV A. N., *Deformations of simple Lie algebras (russian)*, Izv. Akad. Nauk SSR Ser. Mat., **35** (1971), 1113-1119.

[6] STRADE H., *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic I: Structure Theory*, De Gruyter Expositions in Mathematics, **38** (2004).

Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata,
e-mail: viviani@math.hu-berlin.de
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Roma Tor Vergata) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. R. Schoof, Università di Roma Tor Vergata