La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MASSIMO VACCARO

Sottovarieta Kähler e para-Kähler di una varietà para-quaternionale Kähleriana

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 363–366.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_363_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 363-366

Sottovarietà Kähler e para-Kähler di una varietà para-quaternionale Kähleriana

MASSIMO VACCARO

Una varietà para-quaternionale Kähleriana è l'analogo di una varietà quaternionale Kähleriana che ricordiamo è una varietà Riemanniana (M^{4n}, g) con gruppo di olonomia $Hol \subset Sp_1 \cdot Sp_n$. Questo implica l'esistenza di un sottofibrato 3-dimensionale parallelo $Q \subset EndTM$ del fibrato degli endomorfismi localmente generato da tre strutture quasi complesse anticommutanti e antisimmetriche $J_1, J_2, J_3 = J_1J_2 = -J_2J_1,\ J_i^2 = -Id$.

Una varietà pseudo-Riemanniana (M^{4n}, g) con olonomia $Hol \subset Sp_1(\mathbb{R}) \cdot Sp_n(\mathbb{R})$ è detta varietà para-quaternionale Kähleriana. Come nel caso richiamato, ciò implica l'esistenza di un sottofibrato 3-dimensionale parallelo $\widetilde{Q} \subset EndTM$ del fibrato degli endomorfismi localmente generato da tre endomorfismi anticommutanti e antisimmetrici J_1, J_2, J_3 soddisfacenti le relazioni para-quaternionali

$$-J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = Id,\ J_1J_2 = -J_2J_1 = J_3. \tag{1}$$

Come nel caso quaternionale anche le varietà para-quaternionali Kähleriane sono di Einstein. Oggetto della tesi è lo studio delle sottovarietà pseudo-Kähler e para-Kähler di una varietà para-quaternionale Kähleriana.

1. – Sottospazi invarianti di uno spazio para-quaternionale Hermitiano.

La prima parte della tesi tratta di aspetti algebrici riguardanti spazi vettoriali con strutture para-Hermitiane e para-quaternionali in particolare Hermitiane. Innanzitutto si dimostra la corrispondenza biunivoca tra 1) strutture para-Hermitiane (g, K) su V $(K \in EndV,\ K^2 = Id)$, 2) metriche g (di segnatura neutra) associate ad una decomposizione $V = V^+ \oplus V^-$ con V^+ e V^- totalmente isotropi, 3) forme simplettiche ω, associate ad una decomposizione bi-Lagrangiana $V = V^+ \oplus V^-$. Una struttura para-ipercomplessa su V^{2n}, cioè una terna di endomorfismi J_1, J_2, J_3 che soddisfa le relazioni para-quaternionali (1) definisce su V la struttura di $\widetilde{\mathbb{H}}$-modulo. Con $\widetilde{\mathbb{H}}$ indichiamo l'algebra di Clifford $Cl_{1,1}(\mathbb{R}) \simeq Cl_{2,0}(\mathbb{R})$ dei para-quaternioni. L'algebra $\widetilde{\mathbb{H}}$ è isomorfa, come algebra reale normata, a $Mat(2, \mathbb{R})$; dal teorema di Wedderburn ricaviamo pertanto che ogni $\widetilde{\mathbb{H}}$-modulo è somma diretta di sottospazi invarianti 2-dimensionali.

Una sottoalgebra di Lie $\widetilde{Q} \subset End(V)$ si dice una struttura para-quaternionale sullo spazio vettoriale V se è generata su $\mathbb{R}$ da una struttura para-ipercomplessa (J_1, J_2, J_3). Si dimostra che $dimV = 2n$ e $(V, \widetilde{Q}) \simeq (H^2 \otimes E^n, \mathfrak{sl}(H))$ ove $H \simeq \mathbb{R}^2$ e $E \simeq \mathbb{R}^n$, e $\mathfrak{sl}(H))$ è l'algebra di Lie del gruppo di Lie lineare $SL(H)$.

Se (V, g) è uno spazio pseudo-Euclideo e $\widetilde{Q}$ consiste di endomorfismi antisimmetrici allora $(\widetilde{Q}, g)$ si dice struttura para-quaternionale Hermitiana. Si dimostra che ogni spazio vettoriale con struttura Hermitiana para-quaternionale $(V, \widetilde{Q}, g)$ ha dimensione $4n$ ed è isomorfo allo spazio para-quaternionale Hermitiano standard, cioè:

$$(V, \widetilde{Q}, g) \simeq (H^2 \otimes E^{2n},\ \mathfrak{sp}(H) \simeq \mathfrak{sl}(H),\ \omega^H \otimes \omega^E),$$

ove $(H^2 \simeq \mathbb{R}^2, \omega^H)$ e $(E^{2n} \simeq \mathbb{R}^{2n}, \omega^E)$ sono simplettici. La struttura para-quaternionale $\widetilde{Q} \simeq \mathfrak{sl}(H)$ consiste di endomorfismi A di H^2 di traccia nulla che agiscono su V secondo $A(h \otimes e) = Ah \otimes e$. La metrica $g = \omega^H \otimes \omega^E$ di segnatura $(2n, 2n)$ è data da

$$g(h \otimes e, h' \otimes e') = \omega^H(h, h') \cdot \omega^E(e, e'), \quad h, h' \in H,\ e, e' \in E.$$

Inoltre, per ogni $h \in H^2$, il sottospazio $h \otimes E$ è totalmente isotropo.

Il gruppo $Sp_1(\mathbb{R}) \cdot Sp_n(\mathbb{R})$ è il gruppo degli automorfismi di V^{4n} che preserva la metrica pseudo-Euclidea g di segnatura neutra e la struttura para-quaternionale $\widetilde{Q}$.

Preso in considerazione uno spazio vettoriale para-quaternionale Hermitiano, si è proceduto a caratterizzare i seguenti sottospazi invarianti per l'azione di determinate strutture indotte dall'ambiente e di cui qui ricordiamo le definizioni.

Un sottospazio $U \subset V$ dello spazio para-quaternionale Hermitiano $(V^{4n}, \widetilde{Q}, g)$, *non degenere* rispetto alla metrica indotta, si dice:

a) *Hermitiano* se è invariante per una struttura complessa $I \in \widetilde{Q}$, cioè $IU = U$;

b) *totalmente complesso* se esiste una struttura complessa $I \in \widetilde{Q}$ ed una para-complessa $K \in \widetilde{Q}$ tra loro anticommutanti tali che $IU = U$, $KU \perp U$;

c) *para-Hermitiano* se esiste $K \in \widetilde{Q}$, $K^2 = Id$ tale che $KU = U$;

d) *totalmente para-complesso* se esiste una struttura complessa $I \in \widetilde{Q}$ ed una para-complessa $K \in \widetilde{Q}$ tra loro anticommutanti tali che $KU = U$, $IU \perp U$;

e) *totalmente reale* se, per ogni base para-ipercomplessa (I, J, K) di $\widetilde{Q}$ si ha: $IU \perp U,\ JU \perp U,\ KU \perp U$;

f) *para-quaternionale* se è $\widetilde{Q}$-invariante, cioè, per ogni base para-ipercomplessa (I, J, K) di $\widetilde{Q}$, si ha: $IU \subset U,\ JU \subset U,\ KU \subset U$.

Riportiamo solo alcuni dei risultati ottenuti:

PROPOSIZIONE 1. – *Sia $F \subset E^{2n}$ un sottospazio di dimensione $2k$ di E^{2n} e sia $L \in Aut(F, \omega^E|_F)$, $L^2 = -Id$ una struttura complessa su F, tale che la forma bilineare simmetrica*

$$g^L(f, f') = \omega^E(f, Lf') - \omega^E(Lf, f') \qquad \forall f, f' \in F$$

sia non degenere su F. Allora $U = U^{F,L} := \{X = h_1 \otimes f + h_2 \otimes Lf, f \in F\}$ è un sottospazio totalmente complesso di dimensione $2k$ dello spazio para-quaternionale Hermitiano V ed ogni sottospazio totalmente complesso ha tale forma. Inoltre la segnatura $(2p, 2q)$, $p + q = k$, della metrica su U eguaglia la segnatura della metrica Hermitiana g^L su F.

PROPOSIZIONE 2. – *Sia $E' = E_1 \oplus E_2$ una decomposizione di un sottospazio ω^E-non degenere di E nella somma diretta di due sottospazi Lagrangiani. Sia $L : E_1 \to E_2$ una mappa lineare iniettiva, $L \in \mathfrak{sp}^E_\omega(H)$, cioè $\omega^E(e, Lf) + \omega^E(Le, f) = 0\ \forall e, f \in E_1$. Allora il sottospazio $U = U^L := \{X = h_1 \otimes e + h_2 \otimes Le,\ e \in E_1\}$ è totalmente reale in V. Viceversa, ogni sottospazio totalmente reale di V ha tale forma.*

2. – Sottovarietà pseudo Kähler e para-Kähler di una varietà para-quaternionale Kähleriana

Sia $(\widetilde{M}^{4n}, \widetilde{Q}, \tilde{g})$ una varietà para-quaternionale Kähleriana e sia ν la curvatura scalare ridotta. Ricordiamo che $\nabla J_a = -\varepsilon_\beta \omega_\gamma \otimes J_\beta + \varepsilon_\gamma \omega_\beta \otimes J_\gamma$, ove (a, β, γ) è una permutazione ciclica di (1,2,3), $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (-1, 1, 1)$ e $\omega_i, i = 1, 2, 3$, sono 1-forme definite localmente. Indichiamo con $F_a := \tilde{g}(J_a \cdot, \cdot)$ la forma fondamentale associata con J_a.

Una sottovarietà $M^{2m} \subset \widetilde{M}^{4n}$ con metrica indotta g non degenere è detta quasi Hermitiana (risp. quasi para-Hermitiana) se è data una struttura quasi complessa J (risp. quasi para-complessa K) su M, g-antisimmetrica, indotta da una sezione J_1 (risp. J_2) del fibrato $\widetilde{Q}|_M$. Una sottovarietà quasi (para-)Hermitiana si dice (para-)Hermitiana se la struttura quasi complessa J (quasi para-complessa K) è integrabile, quasi (para-)Kähler se la forma di Kähler $F = g \circ J$ ($F = g \circ K$) è chiusa, nearly (para-)Kähler se $dF = \nabla F$ e (para-)Kähler se J (ovvero K) e quindi F è parallela (∇ è la connessione di Levi-Civita).

Si dimostra che una sottovarietà quasi Hermitiana (M^{2m}, J, g), $m > 1$ (risp. una sottovarietà quasi para-Hermitiana (M^{2m}, K, g), $m > 1$) della varietà para-quaternionale Kähleriana $(\widetilde{M}^{4n}, \widetilde{Q}, \tilde{g})$ è integrabile se e solo se la 1-forma locale $\psi = \omega_3 \circ J - \omega_2$ (risp. $\psi = \omega_1 \circ K + \omega_3$) su M^{2m} associata ad una base adattata (J_a) è identicamente nulla.

Sia (M^{2m}, J, g) una varietà quasi Hermitiana (risp. (M^{2m}, K, g) quasi para-Hermitiana). Per ogni $x \in M$ indichiamo con $\overline{T}_x M$ il sottospazio massimale $\widetilde{Q}$-invariante dello spazio tangente $T_x M$. Allora $T_x M = \overline{T}_x M \oplus \mathcal{D}_x$ ove $\mathcal{D}_x$ è un complementare, eventualmente degenere, totalmente complesso (risp. totalmente para-complesso). Si dimostra che in ogni punto $x \in M^{2m}$ dove il tensore di Nijenhuis $N(J)_x \neq 0$ (risp. $N(K)_x \neq 0$) il sottospazio $\mathcal{D}_x$ è 2-dimensionale ovvero si riduce a $\{0\}$. Segue che una condizione sufficiente di integrabilità è che $dim(\mathcal{D}_x) > 2$ su un aperto denso $U \subset M$ ovvero, in caso la sottovarietà sia analitica, $dim(\mathcal{D}_x) > 2$ in un punto $x \in M$. Ogni sottovarietà quasi (para-)Kähleriana M^{2m}, $m \neq 2$, $m \neq 3$, di $\widetilde{M}$ è (para-) Kähler. Inoltre una sottovarietà quasi Hermitiana (risp. quasi para-Hermitiana) M^{2m}, $m > 1$, di $\widetilde{M}$ è Kähler (risp. para-Kähler) se e solo se per ogni $x \in M$ si ha $\omega_2|_{T_x M} = \omega_3|_{T_x M} = 0$ (risp. $\omega_1|_{T_x M} = \omega_3|_{T_x M} = 0$) o equivalentemente $J_2(T_x M) \perp T_x M$ (risp. $J_3(T_x M) \perp T_x M$), dove ω_a sono 1-forme associate ad una base adattata (J_a).

Analogamente alle sottovarietà Kähler in ambiente quaternionale Kähleriano, ogni sottovarietà pseudo-Kähler e para-Kähler di una varietà para-quaternionale Kähleriana è minima. Se inoltre $\widetilde{M}^{4n}$ ha $\nu \neq 0$, ogni sottovarietà totalmente complessa ($J_2 T_x M \perp T_x M$, $\forall x \in M$) è Kähler e viceversa. Analoga equivalenza vale tra sottovarietà para-Kähler e totalmente para-complesse. Particolare attenzione viene posta al caso di sottovarietà pseudo Kähleriana M di dimensione massima, cioè $2n$, in $(\widetilde{M}^{4n}, \widetilde{Q}, \widetilde{g})$. In questo caso, usando l'isomorfismo $J_2 : TM \to T^\perp M$ tra il fibrato tangente e quello normale, si identifica la seconda forma fondamentale h di M con il *tensore di forma* $C = J_2 \circ h \in TM \otimes S^2 T^* M$. L'associato tensore covariante $g \circ C$ ha la forma $gC = q + \bar{q}$ dove $q \in S^3 T_x^{*1,0} M$ è una forma cubica olomorfa; con

$T^{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M + T^{0,1}M$ si indica la decomposizione del fibrato tangente complessificato nella parte olomorfa e antiolomorfa e con $T^{*\mathbb{C}}M = T^{*1,0}M + T^{*0,1}M$ la decomposizione duale del fibrato cotangente.

Analogamente, nel caso di sottovarietà para-Kähleriane (M^{2n}, K, g) di massima dimensione in $(\widetilde{M}^{4n}, \widetilde{Q}, \tilde{g})$, tramite l'isomorfismo $J_3 : TM \to T^{\perp}M$, si identifica la seconda forma fondamentale h di M con il tensore di forma $C = J_3 \circ h$.

Considerando la decomposizione bi-Langrangiana $TM = T^+M + T^-M$ del fibrato tangente corrispondente agli autovalori ± 1 di K e la decomposizione duale $T^*M = (T^+)^*M + (T^-)^*M$ del cotangente, si ha $gC = q^+ + q^- \in S^3(T^+)^*M + S^3(T^-)^*M$.

Si calcolano le equazioni di Gauss-Codazzi e l'espressione del tensore di Ricci Ric_M in termini di C. Indicando con H indifferentemente la struttura complessa e para-complessa, si ha inoltre che (M^{2n}, H, g) è parallela se e solo se

$$P_{XY} := (\nabla_X C)_Y + \omega(X)H \circ C_Y = 0.$$

Viene studiato il caso in cui $(\widetilde{M}^{4n}, \widetilde{Q}, \tilde{g})$ sia localmente simmetrica ed in particolare una space form non piatta. Concludiamo con le seguenti caratterizzazioni.

PROPOSIZIONE 3. – *Sia (M^{2n}, J, g) una sottovarietà Kähleriana parallela di una varietà Kähleriana para-quaternionale $\widetilde{M}^{4n}$ con $\nu \neq 0$. Se non è totalmente geodetica, allora su M esiste una sottofibrato complesso 1-dimensionale parallelo L canonicamente definito del fibrato $S^3(T^{*1,0}M)$ delle forme cubiche olomorfe tale che la curvatura della connessione ∇^L indotta dalla connessione di Levi-Civita ∇ è data da $R^L = i\nu F$, dove $F = g \circ J$ è la forma di Kähler di M.*

PROPOSIZIONE 4. – *Sia (M^{2n}, K, g) una sottovarietà para-Kähleriana parallela di una varietà para-quaternionale Kähleriana $\widetilde{M}^{4n}$ con $\nu \neq 0$. Se non è totalmente geodetica allora su M esistono due sottofibrati reali 1-dimensionali $L^+ := \mathbb{R}q^+ \subset S^3(T^+)$ e $L^- := \mathbb{R}q^- \subset S^3(T^-)$ del fibrato $S^3(T^*M)$ delle forme cubiche (reali), globalmente definiti e paralleli. La curvatura delle connessioni ∇^{L^+} e ∇^{L^-} indotte dalla connessione di Levi-Civita ∇ sui due fibrati ha la forma $R^{L^+} = -\nu F, R^{L^-} = \nu F$, dove $F = g \circ K$ è la forma di Kähler di M.*

BIBLIOGRAFIA

[1] D.V. ALEKSEEVSKY, S. MARCHIAFAVA, *Hermitian and Kähler submanifolds of a quaternionic Kähler manifold*, Osaka J. Math., **38** (2001), 869-904.

[2] D.V. ALEKSEEVSKY, V. CORTÉS, *The twistor spaces of a para-quaternionic Kähler manifold*, Osaka J. Math., **45** (2008), 215-251.

[3] V. CRUCEANU, P. FORTUNY, P.M. GADEA, *A survey on paracomplex geometry*, Rocky Mountain J. Math., **26** (1996), 83-115.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma Tor Vergata
e-mail: massimo_vaccaro@libero.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Roma II) - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Prof. D.V. Alekseevsky, University of Edinburgh