Antonio Tortora

Sui gruppi di Bell

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 359–362.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_359_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 359-362

Sui gruppi di Bell

ANTONIO TORTORA

1. – Introduzione.

I gruppi di esponente finito giocano un ruolo centrale in Teoria dei Gruppi. Per questa ragione molte generalizzazioni sono state considerate ed esaminate; una di queste è il concetto di gruppo n-Bell. Sia $n \neq 0, 1$ un intero. Un gruppo G si dice *n-Bell* se per ogni x, y in G si ha

$$[x^n, y] = [x, y^n],$$

ossia $x^{-n}y^{-1}x^n y = x^{-1}y^{-n}xy^n$. I gruppi n-Bell sono stati introdotti in [5], appaiono frequentemente in letteratura ed il nome scelto è un tributo a H. E. Bell che ha studiato anelli in cui valgono analoghe proprietà. I gruppi di esponente finito che divide n ed i gruppi di esponente finito che divide $n-1$ sono ovviamente n-Bell. Altri esempi di gruppi n-Bell sono i gruppi nelle seguenti varietà.

Gruppi	Legge
n-abeliani	$(xy)^n = x^n y^n$
n-centrali	$[x^n, y] = 1$
2-Engel	$[[x, y], y] = 1$
n-Levi	$[x^n, y] = [x, y]^n$

È evidente la somiglianza tra la definizione di gruppo n-Levi e quella di gruppo n-Bell. Si può vedere facilmente che per $n = 2$ queste condizioni sono equivalenti, poiché ognuna di loro è equivalente alla condizione 2-Engel. In [6], è stato provato che l'equivalenza vale anche per $n = 3$. In generale, se $n \geq 4$, un gruppo n-Bell non è necessariamente n-Levi, come mostrano alcuni esempi in [2] e [5]. Si noti, inoltre, che esistono gruppi n-Bell che non sono m-Levi qualunque sia $m \neq 0, 1$ (si veda [4]).

Dato un gruppo G, sia $R_2(G) = \{a \in G : [[a, x], x] = 1 \text{ per ogni } x \in G\}$ l'insieme degli elementi 2-Engel destri di G. È ben noto che $R_2(G)$ è sempre un sottogruppo caratteristico di G. Se il gruppo quoziente $G/R_2(G)$ ha esponente finito che divide n, allora G è detto un gruppo *n-Kappe*. Questi gruppi sono in stretta connessione con i gruppi n-Bell. Infatti, ogni gruppo n-Bell è $n(n-1)$-Kappe (si veda [2]), e ogni gruppo n-Kappe è n^2-Bell (si veda [3]). Quindi, se G è un gruppo n-Bell, allora $G/R_2(G)$ ha esponente finito che divide $n(n-1)$. Tuttavia, come è stato osservato in [3], anche l'esponente di $G/Z_2(G)$ è finito e dipende da una funzione di n, più precisamente l'esponente in questione divide $12n^5(n-1)^5$. Nel lavoro di tesi si è dimostrato che questo limite può essere migliorato e sostituito da $3n^2(n-1)^2/2$. In più, si è provato che se G è un gruppo n-Levi allora $G/Z_3(G)$ ha esponente finito che divide $n(n-1)$. Questo significa che $Z_3(G)$ gioca per i gruppi n-Levi lo stesso ruolo di $R_2(G)$ per i gruppi n-Bell.

Lo scopo della ricerca è stato anche quello di indagare la connessione tra la classe dei gruppi n-Bell e la classe dei gruppi ottenuti a partire da gruppi n-abeliani mediante estensioni ripetute. Ciò ha senso visto che esistono gruppi n-Bell che non sono n-abeliani; per esempio, un gruppo nilpotente aperiodico di classe 2 è n-Bell ma non è m-abeliano qualunque sia $m \neq 0, 1$. In quest'ottica, particolare attenzione è stata data ai gruppi n-risolubili ed n-nilpotenti. Un gruppo G è detto *n-risolubile* se ammette una *serie n-abeliana* (finita), cioè, una serie $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_k = G$ in cui ogni fattore G_{i+1}/G_i è n-abeliano. Se G è un gruppo n-risolubile, la lunghezza di una minima serie n-abeliana in G è chiamata la *lunghezza n-derivata* di G. Ovviamente, i gruppi risolubili sono n-risolubili per ogni intero n. Un gruppo G è invece detto *n-nilpotente* se ha una *serie n-centrale* (finita), cioè, una serie normale $1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_k = G$ tale che G_{i+1}/G_i è contenuto nell'n-centro di G/G_i per ogni i. Qui l'*n-centro* di G è l'insieme $Z(G; n) = \{x \in G : (xy)^n = x^n y^n \text{ per ogni } y \in G\}$. La lunghezza di una minima serie n-centrale di G è la *classe di n-nilpotenza* di G. I gruppi n-nilpotenti sono n-risolubili, e i gruppi nilpotenti sono n-nilpotenti per ogni intero n.

Utilizzando le considerazioni sugli esponenti a cui si accennava in precedenza, si è provato che se G è un gruppo n-Bell, allora G è n-risolubile di lunghezza al più 3. Come conseguenza, si è dedotto che ogni gruppo n-Bell è n-nilpotente di classe al più 5. Inoltre, usando i risultati di R. Baer sui gruppi n-nilpotenti finiti, ed in particolare il teorema di decomposizione per tali gruppi, si è data la struttura dei gruppi n-Bell localmente finiti. Infine, si sono presi in considerazione gruppi n-Bell localmente graduati per speciali valori di n, dove per *gruppo localmente graduato* si intende un gruppo tale che ogni sottogruppo finitamente generato non identico ammette un quoziente finito non banale. La classe dei gruppi localmente graduati è abbastanza vasta, perché include i gruppi localmente risolubili e i gruppi localmente residualmente finiti.

2. – Gruppi di Bell ed *n*-nilpotenza.

In questa sezione saranno illustrati i risultati principali che provano la n-nilpotenza dei gruppi di Bell, e alcune significative conseguenze.

OSSERVAZIONE. – *Sia G un gruppo n-Bell. Poiché l'esponente di $G/R_2(G)$ divide $n(n-1)$, i sottogruppi G^{n-1} e G^n sono n-Kappe ed $(n-1)$-Kappe rispettivamente. Allora il gruppo quoziente $G/R_2(G)$ è n-abeliano e, in particolare, G è un gruppo n-risolubile di lunghezza al più* 3.

Quanto appena notato assicura che se G è un gruppo n-Bell e $R_2(G) \leq Z_3(G)$, allora G è n-nilpotente di classe al più 4.

TEOREMA 1. – *Siano G un gruppo ed $n \neq 0, 1$ un intero.*

(i) *Se G è n-Bell, allora $G/Z_2(G)$ ha esponente finito che divide $3n^2(n-1)^2/2$.*
(ii) *Se G è n-Levi, allora $G/Z_2(G)$ ha esponente finito che divide $3n(n-1)$.*

Gli esempi seguenti mostrano che il limite nella (ii) del Teorema 1 è il migliore possibile e che $Z_2(G)$ non può essere sostituito da $Z(G)$.

ESEMPIO 1. – *Sia $B(d, n)$ il gruppo libero di Burnside generato da d elementi e di esponente n. Se n è un intero sufficientemente grande tale che $n \equiv 2\ (mod\ 3)$, allora $G = B(2, n) \times B(2, n-1) \times B(3, 3)$ è un gruppo n-Levi e $G/Z_2(G)$ ha esponente esattamente $3n(n-1)$.*

ESEMPIO 2. – *Se G è un gruppo nilpotente aperiodico di classe 2, allora G è n-Levi e $G/Z(G)$ è aperiodico.*

Come conseguenza immediata del Teorema 1 si ha:

COROLLARIO 1. – *Sia G un gruppo n-Bell che verifica una delle seguenti condizioni:*

(i) *4 non divide $n(n-1)$;*
(ii) *G è aperiodico;*
(iii) *G è n-Levi.*

Allora il gruppo quoziente $G/Z_3(G)$ ha esponente finito che divide $n(n-1)$.

In modo del tutto analogo a quanto osservato inizialmente in questa sezione, dal Corollario 1 si deduce che, nelle stesse ipotesi, $G/Z_3(G)$ è n-abeliano, da cui segue che G è n-nilpotente di classe al più 4.

TEOREMA 2. – *Ogni gruppo n-Bell è n-nilpotente di classe al più 5.*

DIMOSTRAZIONE. – Sia G un gruppo n-Bell. Per quanto già detto, ci si può limitare a studiare il caso in cui $R_2(G) \not\leq Z_3(G)$ e 4 divide $n(n-1)$. Per ogni $a \in R_2(G)$ e $x \in G$ si ha $[a, x]^{n(n-1)/2} \equiv [a^{n(n-1)/2}, x] \equiv 1\ (mod\ Z_3(G))$, perché $R_2(G)^2 \leq Z_3(G)$ e 2 divide $n(n-1)/2$. Questo implica che $(ax)^n \equiv a^n x^n [x, a]^{n(n-1)/2} \equiv a^n x^n\ (mod\ Z_3(G))$. Allora $R_2(G)Z_3(G)/Z_3(G)$ è contenuto nell'n-centro di $G/Z_3(G)$ e così la serie

$$\{1\} \leq Z(G) \leq Z_2(G) \leq Z_3(G) \leq R_2(G)Z_3(G) \leq G$$

è n-centrale. Di conseguenza G è n-nilpotente di classe al più 5, come desiderato. □

In [1] R. Baer ha dimostrato che ogni gruppo n-nilpotente finito può essere rappresentato come prodotto diretto di sottogruppi di ordine coprimo. Tenuto conto di ciò e del Teorema 2, si ricava facilmente la struttura dei gruppi n-Bell localmente finiti.

TEOREMA 3. – *Siano G un gruppo n-Bell localmente finito, π_1 e π_2 gli insiemi dei primi che dividono n ed $n-1$ rispettivamente, e $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$. Allora $G = A \times B \times C$ dove A è un π_1-gruppo, B è un π_2-gruppo, e C è un π'-gruppo 2-Engel. Inoltre, A è n-Kappe e B è $(n-1)$-Kappe.*

COROLLARIO 2. – *Sia G un gruppo n-Bell localmente graduato.*

(i) *Se $|n|$ e $|n-1|$ sono potenze di primi, allora G è localmente nilpotente.*
(ii) *Se $|n|$ o $|n-1|$ è uguale a $2^a p^b$ dove p è un primo ed a, b sono interi non negativi, allora G è localmente risolubile.*

Si osservi che per la congettura di Catalano, recentemente provata, se $n = p^a$, $n - 1 = q^b$ con p, q primi ed $a, b > 1$, allora $n = 9$ ed $n - 1 = 8$. Quindi nella (i) del Corollario 2 si ha $n = 9$, oppure $n = -8$, oppure uno tra $|n|$ e $|n-1|$ è primo. Comunque, nel precedente corollario l'ipotesi che G sia localmente graduato non può essere eliminata come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 3. – *Siano k ed n interi positivi con n sufficientemente grande. S. I. Adjan ha costruito un gruppo finitamente generato aperiodico $G = A(k, n)$ tale che $G/Z(G)$ è isomorfo al gruppo libero di Burnside $B(k, n)$. Tale gruppo è n-Bell, ma essendo finitamente generato e aperiodico, non risulta localmente graduato.*

BIBLIOGRAFIA

[1] BAER R., *Factorization of n-soluble and n-nilpotent groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 15-26.
[2] BRANDL R. and KAPPE L.-C., *On n-Bell groups*, Comm. Algebra, **17**, n. 4 (1989), 787-807.
[3] DELIZIA C., MOGHADDAM M. R. R. and RHEMTULLA A., *The structure of Bell groups*, J. Group Theory, **9**, n. 1 (2006), 117-125.
[4] DELIZIA C., MORAVEC P. and NICOTERA C., *Locally graded Bell groups*, Publ. Math. Debrecen, **71**, n. 1-2 (2007), 1-9.
[5] KAPPE L.-C., *On n-Levi groups*, Arch. Math., **47** (1986), 198-210.
[6] KAPPE L.-C. and MORSE R. F., *Groups with 3-abelian normal closure*, Arch. Math., **51** ,n. 2 (1998), 104-110.
[7] TORTORA A., *Some properties of Bell groups*, Comm. Algebra, in corso di stampa.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Salerno
e-mail: antortora@unisa.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Salerno)
Ciclo XX (Ciclo VI Nuova Serie)
Direttori di ricerca: Prof.ssa Patrizia Longobardi - Dr. Costantino Delizia, Università di Salerno