La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Loredana Sorrenti

Ideali monomiali e loro risoluzioni

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 355–358.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_355_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 355-358

Ideali monomiali e loro risoluzioni

LOREDANA SORRENTI

1. – Finalità e cenni storici.

Siano k un campo, $A = k[x_1, \ldots, x_n]$ l'anello dei polinomi, I un ideale monomiale omogeneo di A. La risoluzione libera minimale di I è una sequenza esatta di moduli liberi graduati e omomorfismi del tipo:

$$\mathbb{L}_\cdot : \ 0 \to \bigoplus A^{\beta_{gj}}(-j) \xrightarrow{\varphi_g} \ldots \to \bigoplus A^{\beta_{1j}}(-j) \xrightarrow{\varphi_1} I \to 0$$

dove i numeri β_{ij} sono i numeri di Betti graduati dell'ideale I. L'obiettivo principale di questa tesi è la caratterizzazione di alcune importanti classi di ideali monomiali di A dal punto di vista delle loro risoluzioni. Tale problematica ha interesse sia nel campo dell'algebra commutativa che nel campo della geometria algebrica. È noto infatti che algebre del tipo $R = A/I$, con I ideale omogeneo, sono anelli di coordinate di varietà algebriche dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^{n-1}$. Alcuni invarianti numerici di tali algebre che intervengono nella descrizione delle varietà $V \subset \mathbb{P}^{n-1}$ definite da I, possono essere calcolati mediante la risoluzione di I. Tra questi, la serie di Hilbert, definita da $P_R(z) := \sum_{t \geq 0} H_R(t) z^t$, dove $H_R(t) := dim_k A_t - dim_k I_t$. Tale serie è razionale e si può scrivere $P_R(z) = h(z)/(1-z)^d$, dove d è il grado dei generatori di I, $h(z) = h_0 + h_1 z + \ldots + h_s z^s$ ha coefficienti interi e $h(1) \neq 0$. I più immediati caratteri numerici che si possono leggere dalla serie di Hilbert sono la molteplicità di R, $e_0 := h(1)$ e il genere aritmetico, $g := \sum_{j=1}^{s} h_j \binom{j-1}{d-1}$. Questi caratteri numerici hanno significato geometrico rilevante: ad esempio, le curve di genere 0 sono le curve razionali, quelle di genere 1 sono le curve ellittiche. Inoltre, la formula $H_R(t) = \dfrac{\sum_{i,j} (-1)^i \beta_{ij}(R) t^j}{(1-t)^n}$ che consente una computazione della serie di Hilbert di R mediante la risoluzione dell'ideale I, evidenzia la necessità di conoscere le risoluzioni degli ideali monomiali in questioni di natura geometrica. In questo contesto si inserisce il problema di classificare gli ideali associati a schemi di punti grassi in $\mathbb{P}^{n-1}$. Tali ideali sono monomiali e uno dei punti chiave in tale classificazione è proprio la determinazione della serie di Hilbert e dei numeri di Betti.

Il problema di determinare una risoluzione libera minimale per un arbitrario ideale monomiale fu posto da Kaplansky nel 1960. Sebbene possa sembrare di facile soluzione, essendo gli ideali monomiali la più semplice classe di $A-$moduli, una risoluzione universale sembra impossibile da determinare. In particolare, esistono numerosi esempi che mostrano la dipendenza del problema dalla caratteristica del campo k. I tentativi di risolvere tale questione si svilupparono in parecchie direzioni dando vita a diverse e interessanti teorie, atte a studiare il problema da differenti punti di vista. Nel 1966 Diana Taylor costruisce una risoluzione libera per un arbitrario ideale monomiale. La *risoluzione di Taylor*, pur non essendo minimale, ha il vantaggio di non dipendere dalla caratteristica. Alcuni risultati recenti di Herzog, Miller, Gasharov, Peeva, Sturmfels ed altri, nascono dal tentativo di abbassare la lunghezza della risoluzione di Taylor per ottenere validi bound per i numeri di Betti. Un modo per ottenere maggiori informazioni è quello di restringersi a classi speciali di ideali monomiali, rimuovendo così il principale ostacolo: trovare i generatori dell'omologia in generale. Un altro approccio è la *teoria di Stanley-Reisner*, una branca dell'algebra commutativa creata da Hochster e Stanley, attorno al 1970. Gli oggetti combinatorici considerati sono i complessi simpliciali, ai quali si associano oggetti algebrici, gli anelli di Stanley-Reisner. Nella tesi si studia il problema delle risoluzioni per classi speciali di ideali usando tecniche e risultati di algebra commutativa, algebra omologica e combinatorica. Strumenti di algebra computazionale sono usati nel calcolo delle risoluzioni e nella determinazione di alcune classi di ideali. Sono messe inoltre in evidenza alcune possibili applicazioni in diversi campi.

2. – Descrizione della tesi e principali risultati.

La tesi si articola nelle seguenti parti: un'introduzione, cinque capitoli e l'elenco dei riferimenti bibliografici. I primi due capitoli sono dedicati ad una panoramica dei principali risultati noti sulla teoria delle risoluzioni, le funzioni di Hilbert e la teoria degli ideali monomiali. Il capitolo 3 contiene risultati originali che forniscono un contributo al problema generale di determinare tutti gli ideali monomiali la cui risoluzione è lineare, cioè del tipo:

$$0 \to A^{\beta_k}[-d-k+1] \to \cdots \to A^{\beta_2}[-d-1] \to A^{\beta_1}[-d] \to I \to 0.$$

In questo capitolo viene introdotta e studiata la classe degli ideali lexsegmento. Nella terminologia usuale, un ideale lexsegmento è un ideale monomiale che, in ogni grado, è generato da lexsegmenti iniziali di monomi, cioè da insiemi del tipo $L^i(u) = \{w \in M_d : w \geq u\}$ dove M_d denota l'insieme di tutti i monomi di grado d di A, $u \in M_d$ e $>$ l'ordine lessicografico con $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$. Questa definizione risale al 1927 ed è dovuta a Macaulay. In questa tesi gli ideali di Macaulay sono denominati ideali lexsegmento iniziali in quanto si considerano anche ideali lexsegmento finali, cioè generati da insiemi del tipo $L^f(v) = \{w \in M_d : w \leq v\}$, $v \in M_d$ e ideali lexsegmento arbitrari (o semplicemente ideali lexsegmento) generati da insiemi del tipo $L(u, v) = \{w \in M_d : u \geq w \geq v\}$, seguendo le definizioni date da Hulett e Martin nel 2004. Nello studio delle funzioni di Hilbert gli ideali lexsegmento hanno un ruolo cruciale. Il teorema fondamentale di Macaulay sulle funzioni di Hilbert può essere espresso nella seguente forma: per ogni ideale I di A esiste un unico ideale lexsegmento iniziale, denotato con I^{lex}, che ha la stessa funzione di Hilbert di I. Dal punto di vista omologico tali ideali sono altrettanto importanti. Bigatti, Hulett e Pardue mostrano infatti che i numeri di Betti graduati di ideali lexsegmento costituiscono degli upper bounds per i numeri di Betti di tutti gli ideali graduati che hanno la stessa funzione di Hilbert. Gli ideali lexsemento iniziali sono stabili, pertanto le loro risoluzioni sono descritte dalle note formule di Eliahou e Kervaire. La teoria si complica se si considerano gli ideali lexsegmento arbitrari. Se I è un ideale lexsegmento iniziale allora $\mathrm{m}I$, dove m è l'ideale massimale graduato di A, è un ideale lexsegmento iniziale. Gli ideali lexsegmento arbitrari con questa proprietà si chiamano completamente lexsegmento. Molti autori (Aramova, Bonanzinga, Herzog, Hulett, Deery, De Negri, Martin) hanno studiato le seguenti questioni: (1) Quando un ideale lexsegmento ha una risoluzione lineare, (2) Quando un ideale lexsegmento è completamente lexsegmento. In particolare in [1] vengono caratterizzati tutti gli ideali lexsegmento completamente lexsegmento e tutti quelli con risoluzione lineare. Nel capitolo 3 viene data una completa soluzione del problema per ideali monomiali lexsegmento squarefree. Precisamente vengono caratterizzati tutti gli ideali completamente lexsegmento squarefree, descrivendone la forma dei generatori e nel teorema enunciato di seguito, vengono descritti tutti gli ideali completamente lexsegmento la cui risoluzione è lineare:

TEOREMA. – *Siano* $u = x_{i_1} \cdots x_{i_d}$, $v = x_{j_1} \cdots x_{j_d} \in M_d$ *monomi squarefree con* $u \geq v$ *e* $I = (L(u,v))$ *un ideale completamento lexsegmento squarefree. Sia h il più piccolo intero tale che* $(i_h, j_h) \neq (h,h)$ *e* $B = \{w \in M_d : x_h w' > v\}$. *Allora I ha risoluzione lineare se e solo se vale una delle seguenti condizioni:*

(*a*) $u = x_1 \cdots x_{h-1} x_{i_h} \cdots x_{i_d}$ *con* $x_{i_h} \cdots x_{i_d} \geq x_{h+2} \cdots x_{d+2}$ *e*
$v = x_1 \cdots x_{h-1} x_{n-d+h} x_{n-d+h+1} \cdots x_n$

(*b*) $i_h = h$ *e vale la seguente condizione: per ogni* $(w_1, w_2) \in B \times B$ *con* $w_1 \neq w_2$ *esiste un indice l*, $m(w_1) \leq l < M(w_2)$ *tale che* $\dfrac{x_h w_2}{x_l} \leq u$ *and* $\dfrac{w_1}{x_{m(w_1)}} \neq \dfrac{w_2}{x_l}$, *(dove* $M(w) = \max\{i : x_i \text{ divide } w\}$, $m(w) = \min\{i : x_i \text{ divide } w\}$, $w' = w/M(w)$*).*

Questo risultato, utilizzando una procedura esplicitata nella tesi, consente di ottenere tutti gli ideali lexsegmento con risoluzione lineare. Sebbene il teorema sia ispirato al caso non squarefree, l'enunciato è sostanzialmente differente. La prova si basa sulla descrizione dei gruppi di omologia degli ideali lexsegmento. Tali gruppi sono scritti in maniera formalmente analoga al caso non squarefree, ma la loro sostanziale differenza ha reso necessario l'utilizzo di nuove tecniche.

Nel capitolo 4 si studia la proprietà degli ideali monomiali di avere quozienti lineari. Un ideale $I = (f_1, \dots, f_m)$ ha quozienti lineari se gli ideali colon $I_{j-1} : f_j$ sono generati da sottoinsiemi di variabili. Quest'ipotesi sembrerebbe essere molto restrittiva, ma esistono molti interessanti esempi di ideali con questa proprietà, quali gli ideali stabili, stabili squarefree e matroidali. Inoltre, sotto certe ipotesi, le risoluzioni di questi ideali possono essere ottenute per iterati mapping cones. Herzog e Takayama [3] utilizzano questa procedura ottenendo una costruzione basata sulle funzioni di decomposizione, funzioni che associano in modo naturale ad ogni monomio dell'ideale un generatore.

Tale costruzione consente di ottenere le mappe e le basi dei moduli dell'omologia per ideali con quozienti lineari e la cui funzione di decomposizione soddisfa una certa condizione (detta di regolarità), ad esempio per la classe degli ideali matroidali. In generale un ideale lexsegmento arbitrario non ha quozienti lineari rispetto all'ordine lessicografico. Si caratterizzano tutti gli ideali lexsegmento arbitrari con quozienti lineari rispetto all'ordine lessicografico e si prova che questi ideali hanno una funzione regolare di decomposizione. Utilizzando questa descrizione e la risoluzione di Herzog-Takayama si determinano esplicitamente le risoluzioni minimali e si calcolano i numeri di Betti, la dimensione proiettiva e la serie di Hilbert per questa classe di ideali [4]. Per studiare gli ideali con quozienti lineari sono costruiti e implementati algoritmi per il calcolo dei quozienti, della funzione di decomposizione e per testare la regolarità.

Nel capitolo 5 si esaminano alcuni aspetti applicativi. Nella prima parte i risultati ottenuti per ideali squarefree sono interpretati nell'algebra esterna E, allo scopo di studiare le proprietà dei complessi simpliciali associati. Dato un complesso simpliciale Δ, sull'insieme di vertici $[n] = \{x_1, \dots, x_n\}$, si studiano le proprietà combinatoriche di Δ in connessione con le proprietà algebriche dell'ideale di Stanley Reisner $I_\Delta = (x_{i_1} \cdots x_{i_n} : \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \notin \Delta)$ e dell'ideale I_{Δ^*}, dove $\Delta^* = \{[n] \setminus F : F \notin \Delta\}$ è il duale di Alexander di Δ. Nell'ipotesi in cui I_{Δ^*} è un ideale lexsegmento si determinano alcuni casi in cui quest'ultimo ha risoluzione lineare, essendo quest'ultima proprietà uno strumento utile per testare se l'anello di Stanley-Reisner $k\{\Delta\} := E/I_\Delta$ è Cohen-Macaulay. I principali risultati di questo capitolo consistono nel calcolo dei gruppi di coomologia simpliciale ridotta di ideali completamente lexsegmento e di ideali con risoluzione lineare dell'algebra esterna. Mediante significativi esempi si mette in evidenza l'utilità di questi risultati nel campo della topologia computazionale per l'analisi di immagini digitali. La seconda parte del capitolo è dedicata allo studio delle applicazioni degli ideali monomiali in teoria dei grafi, alla determinazione di classi di grafi Gotzmann e alla caratterizzazione di tutti i grafi Gotzmann principali di Borel.

Questa tesi è stata valutata dal professor J. Herzog, uno dei principali esperti delle tematiche trattate, in accordo con gli standard tedeschi, con il grado *magna cum laude*.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARAMOVA A., DE NEGRI E. and HERZOG H., *Lexsegment ideals with linear resolution*, Illinois J. of Math., **42** (1998), 509-523.

[2] BONANZINGA V. and SORRENTI L., *Lexsegment ideals and simplicial cohomology groups*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, **75** (2007), 172-183.

[3] HERZOG J. and TAKAYAMA H., *Resolutions by mapping cones*, Homology Homotopy Appl., **4** (2002), 277-294.

[4] SORRENTI L., *Lexsegment ideals with linear quotients and their minimal free resolution*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, **50** (98) (2007), 355-369.

DIMET, Università Mediterranea di Reggio Calabria, Facoltà di Ingegneria
e-mail: loredana.sorrenti@unirc.it

Dottorato di ricerca in Matematica (sede amministrativa: Università di Messina) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof.ssa Vittoria Bonanzinga, Università Mediterranea di Reggio Calabria