
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANNA SCARAMUZZA

Varietà toriche lisce e complete: un approccio algoritmico

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1 (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 347–350.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_347_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_347_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Varietà toriche lisce e complete: un approccio algoritmico

ANNA SCARAMUZZA

Le varietà toriche stabiliscono un legame tra la geometria algebrica e la geometria convessa, l'algebra e la geometria combinatoria. Infatti, si possono introdurre utilizzando il concetto di fan o ventaglio proprio della geometria convessa, oppure analizzando l'azione del toro algebrico su di esse evidenziando in questo secondo caso un approccio algebrico. Infine, si può vedere che le proprietà geometriche di tali varietà si traducono in proprietà combinatoriali del fan. Queste varietà si possono studiare da differenti punti di vista: nella presente Tesi di Dottorato si studiano le varietà toriche lisce e complete da un punto di vista computazionale. Più precisamente si è cercato di descrivere una varietà torica X e si è studiato il suo cono di Mori per determinare una condizione computazionale che permetta di stabilire se X è proiettiva e, nel caso in cui lo sia, quali sono le sue classi contraibili ed estremali.

Tutti i problemi considerati sono stati risolti analizzando dei sistemi di equazioni lineari Diofantee: per la descrizione della varietà X è stata fondamentale la caratterizzazione dell'insieme delle soluzioni di tali sistemi, mentre per i problemi legati alla geometria del cono di Mori è stato sufficiente stabilire se un'equazione Diofantea ammette una soluzione non banale.

Grazie a questa analisi, è stato scritto con il linguaggio di programmazione *Mathematica 5.0* un pacchetto, *Toric Varieties*, con il quale è possibile descrivere X e il suo cono di Mori. I programmi del pacchetto hanno permesso di determinare i raggi estremali dei coni Mori delle varietà di Fano toriche di dimensione $n \leq 4$ e numero di Picard $\rho \geq 3$.

1. – Descrizione di una varietà torica.

Sia N un gruppo abeliano libero di rango n , cioè $N \cong \mathbb{Z}^n$, e sia $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ la sua estensione razionale. Sia X una varietà torica liscia e completa di dimensione n . Definiamo X mediante il suo fan: una collezione finita di coni convessi e poliedrali di $N_{\mathbb{Q}}$. Il fan Σ_X è completamente determinato dall'insieme $G(\Sigma_X)$ dei suoi generatori e dai coni di dimensione n .

Per studiare il cono di Mori di X è molto utile descrivere Σ_X con il linguaggio delle collezioni e relazioni primitive introdotto da Batyrev [2]. Una collezione primitiva P è un sottoinsieme di $G(\Sigma_X)$ che non determina un cono nel fan mentre ogni suo sottoinsieme proprio ne genera uno. A ogni collezione primitiva $P = \{x_1, \dots, x_k\}$ si associa un'unica relazione, detta *relazione primitiva*:

$$(1) \quad x_1 + \dots + x_k - (a_1 y_1 + \dots + a_h y_h) = 0,$$

dove a_i sono dei numeri interi positivi e $\{y_1, \dots, y_h\}$ è un insieme di generatori disgiunto da P che genera un cono nel fan.

Se si descrive il fan a partire dall'insieme dei suoi generatori e dei suoi coni massimali, si vede che semplici operazioni insiemistiche permettono di determinare le collezioni primitive. Il problema è calcolare la relazione primitiva associata ad una collezione primitiva. Sia $P = \{x_1, \dots, x_k\}$ una collezione primitiva. Si definisce come sistema lineare associato a P :

$$(2) \quad \sum_{y \in G(\Sigma_X) \setminus P} v_y y = \underline{u},$$

dove $\underline{u} = x_1 + \dots + x_k$, $y \in G(\Sigma_X) \setminus P$ e v_y sono le incognite del sistema. Per determinare la relazione primitiva associata a P si deve cercare una soluzione del sistema (2) data da numeri interi non negativi, cioè in $\mathbb{Z}_{\geq 0}^p$, dove p è la cardinalità di $G(\Sigma_X) \setminus P$. Si deve quindi studiare l'insieme delle soluzioni di tale sistema in $\mathbb{Z}_{\geq 0}^p$. In $\mathbb{Z}_{\geq 0}^p$ si considera il seguente ordinamento parziale: $(a_1, \dots, a_p) \leq (b_1, \dots, b_p)$ se e solo se $a_i \leq b_i$ per ogni $i = 1, \dots, p$. L'insieme delle soluzioni del sistema (2) è completamente determinato da due insiemi finiti (vedi [1]):

1. l'insieme delle soluzioni minimali (rispetto all'ordinamento fissato) del sistema dato,
2. l'insieme delle soluzioni minimali (rispetto all'ordinamento fissato) del sistema omogeneo associato al sistema (2).

Nella Tesi di Dottorato si dimostra il seguente risultato.

TEOREMA 1. — *Data una collezione primitiva $P = \{x_1, \dots, x_k\}$ i numeri interi positivi $a_1, \dots, a_h$ tali che $x_1 + \dots + x_k - (a_1 y_1 + \dots + a_h y_h) = 0$ sia la relazione primitiva associata a P costituiscono una soluzione minimale del sistema associato a P .*

Teorema 1 afferma che la soluzione che determina la relazione primitiva si trova in un insieme finito di soluzioni. Successivamente si prova anche che la soluzione cercata è unica.

PROPOSIZIONE 1. — *Nell'insieme delle soluzioni minimali del sistema (2) associato ad una collezione primitiva P esiste un'unica soluzione $\underline{a} = (a_y)_{y \in G(\Sigma_X) \setminus P} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^p$ tale che l'insieme $G_a = \{y \in G(\Sigma_X) \setminus P \mid a_y \neq 0\}$ genera un cono in Σ_X .*

2. – Proiettività e cono di Mori.

Sia $\mathcal{N}_1(X)$ il gruppo degli 1-cicli modulo equivalenza numerica e sia $\mathcal{N}_1(X)_{\mathbb{Q}} = \mathcal{N}_1(X) \otimes \mathbb{Q}$ la sua estensione razionale. In $\mathcal{N}_1(X)_{\mathbb{Q}}$ si definisce come cono di Mori $\text{NE}(X)$ il cono generato dalle classi di curve effettive. Reid ha dimostrato che l'insieme $\mathcal{I}$ delle classi di curve invarianti (rispetto all'azione del toro algebrico) genera l'intersezione $\text{NE}(X)_{\mathbb{Z}} = \text{NE}(X) \cap \mathcal{N}_1(X)$ (vedi [4]). E quindi, l'insieme $\mathcal{I}$ contiene una base di $\mathcal{N}_1(X)$. Reid prova anche che ad una classe $\gamma \in \mathcal{I}$ si può associare una

relazione del tipo:

$$(3) \quad x_{n+1} + x_n + b_1 x_1 + \cdots + b_{n-1} x_{n-1} = 0.$$

Ogni classe $\gamma \in \mathcal{I}$ viene identificata con il polinomio $p_\gamma = z_{n+1} + z_n + b_1 z_1 + \cdots + b_{n-1} z_{n-1}$. Si considera poi l'insieme delle sizigie tra i polinomi $\{p_\gamma \mid \gamma \in \mathcal{I}\}$. Una sizigia tra i polinomi p_γ determina una relazione tra le classi di $\mathcal{I}$ e viceversa. L'insieme delle sizigie tra i polinomi associati alle classi di curve è un ideale di un opportuno anello dei polinomi a coefficienti interi e quindi per descrivere tale insieme è sufficiente determinarne un suo sistema di generatori. Utilizzando tale sistema di generatori si può determinare una base B di $\mathcal{N}_1(X)$. Successivamente si identifica la base B con la base canonica di $\mathbb{Q}^p$ ottenendo così una descrizione vettoriale di ogni elemento di $\mathcal{I}$. Se $\mathcal{V} = \{\underline{w}_\gamma \mid \gamma \in \mathcal{I}\}$ è l'insieme dei vettori delle coordinate di tutte le classi $\gamma \in \mathcal{I}$ rispetto alla base B precedentemente determinata, allora il seguente risultato è la traduzione computazionale del criterio di Kleiman per stabilire la proiettività di X .

LEMMA 1. – *Una varietà X è proiettiva se e solo se l'equazione*

$$(4) \quad \sum_{\gamma \in \mathcal{I}} \underline{w}_\gamma v_\gamma = 0$$

ha solo la soluzione banale in $\mathbb{Z}_{\geq 0}^s$, con s la cardinalità di $\mathcal{I}$.

Nel caso in cui X sia proiettiva, Casagrande dimostra che esiste un sottoinsieme di $\mathcal{I}$ che genera $\text{NE}(X)_{\mathbb{Z}}$ (vedi [3]). Tale sottoinsieme è denotato con $\mathcal{C}$ ed è costituito dalle classi contraibili. Una classe $\gamma \in \text{NE}(X)_{\mathbb{Z}}$ di curve invarianti modulo equivalenza numerica si dice *contraibile* se esistono una varietà torica X_γ e un morfismo equivariante, suriettivo e a fibre connesse $\varphi_\gamma : X \rightarrow X_\gamma$ tale che per ogni curva irriducibile $C \subset X$ si abbia che $\varphi_\gamma = \{pt\}$ se e solo se $[C] \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \gamma$. Poiché $\mathcal{C}$ genera $\text{NE}(X)_{\mathbb{Z}}$ allora $\mathcal{C}$ contiene una base di $\mathcal{N}_1(X)$. La stessa tecnica utilizzata precedentemente permette di determinare una base B di $\mathcal{N}_1(X)$ e i vettori delle coordinate di ogni classe di $\mathcal{C}$ rispetto a tale base.

Si dice che una classe è *estremale* se è l'elemento primitivo dei raggi di $\text{NE}(X) \cap \mathcal{N}_1(X)$. Dai risultati di Reid segue che l'insieme $\mathcal{E}$ delle classi estremali è un sottoinsieme di $\mathcal{C}$. In [3] Casagrande osserva che una classe γ è estremale se e solo se X_γ è proiettiva e φ_γ è birazionale. Tale fatto non si presta ad essere tradotto computazionalmente. Si può, invece, osservare che la definizione di classe non estremale consente di ottenere il seguente criterio.

LEMMA 2. – *Sia $\mathcal{C} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$ l'insieme delle classi contraibili di X . Sia $\mathcal{V} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_s\}$ l'insieme dei vettori delle coordinate delle classi contraibili. Allora le seguenti sono equivalenti:*

- la classe γ_i è non estrema;
- l'equazione

$$(5) \quad \underline{w}_i = \sum_{i \neq j} v_j \underline{w}_j,$$

ha una soluzione banale in $\mathbb{Q}_{\geq 0}^{s-1}$.

3. – Applicazioni: raggi estremali di varietà toriche lisce e di Fano.

Nella Tesi di Dottorato è stato considerato il problema di descrivere tutte le varietà toriche lisce di Fano di dimensione $n \leq 4$ e numero di Picard $\rho \geq 3$ mediante le relazioni primitive e poi di determinare i raggi estremali del loro cono di Mori. Si osserva che se $\text{NE}(X)$ è simpliciale allora ci sono esattamente ρ raggi estremali. Se $\rho \geq 3$, il cono di Mori non è sempre simpliciale. I calcoli effettuati permettono di concludere che:

- quando $\rho = 3$ il cono di Mori è sempre simpliciale,
- si possono determinare tutte le classi estremali di tutte le varietà,
- non ci sono classi contraibili non estremali, quindi la varietà associata ad ogni classe contraibile è sempre proiettiva.

In dimensione 2 ci sono 5 varietà e il cono di Mori non è simpliciale solo in un caso. Questo è il caso della superficie di Del Pezzo ottenuta scoppiando il piano in tre punti e il suo cono di Mori ha dimensione 4 e 6 raggi estremali.

In dimensione 3 ci sono 18 varietà e solo 13 hanno numero di Picard $\rho \geq 3$. Vi sono solo due casi in cui il cono di Mori non è simpliciale: questi corrispondono alle varietà con numero di Picard massimale ($\rho = 5$) e hanno entrambe 7 raggi estremali.

Infine, in dimensione 4 ci sono 124 varietà di cui 114 con $\rho \geq 3$. Tra le 114 varietà ce ne sono 23 con un cono di Mori non simpliciale. La varietà con il massimo numero di raggi estremali (20) è la varietà di Del Pezzo di dimensione 4 e $\rho = 6$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AJILI F., CONTEJEAN E., *Complete solving of linear and Diophantine equational and disequational systems without adding variables*, Technical Report, INIRIA, **0175** (June 1995), 23.
- [2] BATYREV V., *On the classification of smooth projective toric varieties*, Tohoku Mathematical Journal, **43** (1991), 569-585.
- [3] CASAGRANDE C., *Contractible classes in toric varieties*, Mathematische Zeitschrift, **243** (2003), 99-126.
- [4] REID M., *Decomposition of toric morphisms*, Arithmetics and Geometry, dedicated to I. R. Shafarevich, Prog. Math., **2** (1988), 395-418.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi Roma Tre
e-mail: scaramuz@mat.uniroma3.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Roma Tre) - Ciclo XVIII
Direttori di ricerca: Dr. Cinzia Casagrande - Prof. Lucia Caporaso