
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ALBERTO SARACCO

Problemi di estensione in geometria complessa e CR

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1 (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 343–346.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_343_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_343_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Problemi di estensione in geometria complessa e CR

ALBERTO SARACCO

1. – Introduzione.

Il problema dell'estensione di oggetti è un problema ricorrente in matematica, ed è presente in molti settori. Che si tratti di estendere funzionali, superfici, curve, o più semplicemente funzioni, i problemi di estensione si sono dimostrati assolutamente non banali e interessanti, e hanno dato luce a nuove branche della matematica. Tutti i problemi di valori al bordo possono essere considerati problemi di estensione: in effetti elementi di una categoria possono essere interpretati come tracce di oggetti in un'altra categoria. In geometria complessa e CR, siamo interessati ad estendere funzioni olomorfe e meromorfe e, più in generale, tutti gli oggetti analitici, ovvero quegli oggetti che si possono definire a partire dalle funzioni olomorfe. Il teorema di estensione di Hartogs (le funzioni olomorfe si estendono attraverso buchi compatti in C^n , $n \geq 2$) è il prototipo di tutti questi teoremi.

Lo scopo di questa tesi è presentare alcuni dei molteplici e differenti problemi di estensione che sono stati considerati nella geometria complessa e CR, a partire dai risultati classici e ben conosciuti, fino a quelli più recenti e ancora inediti, e ai problemi aperti. Questa tesi è un (parziale, data l'immensità del soggetto) compendio sui problemi d'estensione. Non c'è presunzione di completezza, e neppure un giudizio di importanza degli argomenti scelti, dato che la scelta, molto personale, è nata semplicemente dai miei interessi di ricerca e dalle mie esperienze matematiche degli ultimi anni.

La tesi è divisa in tre parti. Nella prima (capitoli 1–3), dopo aver richiamato le nozioni di base della geometria complessa e CR, facciamo una panoramica sui principali risultati di estensione partendo da quelli pionieristici di Hans Lewy. Nella seconda e terza parte sono inclusi i risultati di ricerca originali della tesi, ottenuti in recenti lavori in collaborazione con Giuseppe Tomassini e Giuseppe Della Sala. Queste ultime due parti superficialmente potrebbero apparire su due temi differenti (la coomologia delle semi-corone, capitoli 4–5, e il problema del bordo non compatto, capitoli 7–8), ma in realtà sono strettamente collegate fra loro. Hanno alcuni legami superficiali (ad esempio la presenza di teoremi validi a partire dalla dimensione 3 e lo stesso controesempio in dimensione 2), il collegamento più importante è la loro natura di risultati di estensione di tipo non compatto.

Questa è appunto la chiave di lettura che abbiamo voluto dare nella tesi a questi risultati.

2. – Contenuti.

Esaminiamo ora nei dettagli i contenuti della tesi.

I capitoli 1 e 2 sono dedicati alle definizioni di base delle nozioni di geometria complessa e CR che saranno utili in seguito, e alla presentazione dei risultati di estensione classici in una e più variabili.

Nel capitolo 3 — **Estensione di funzioni CR fino a un bordo Levi-piatto** — sono raccolti molti teoremi locali e globali di estensione per funzioni CR. In particolare, sono discussi nei dettagli alcuni teoremi di estensione dimostrati negli anni ottanta da Guido Lupacciolu e Giuseppe Tomassini, per le funzioni CR definite sul bordo di un dominio limitato in $\mathbb{C}^m$ al di fuori di una parte Levi-piatta, e la generalizzazione dei suddetti teoremi alle varietà di Stein, dimostrata da Christine Laurant-Thiébaud. Infine, trattiamo il risultato di estensione di funzioni CR definite in superfici illimitate, dove la condizione $(\star)$ di Lupacciolu, di “piccola chiusura all’infinito”, è stata introdotta per la prima volta (questa condizione comparirà nei risultati originali della terza parte della tesi). L’ultima sezione del capitolo è dedicata ad una panoramica dei risultati ottenuti da Klas Diederich e Sergey Pinchuk negli ultimi trent’anni sulle generalizzazioni del principio di riflessione di Schwartz e sull’estensione di mappe olomorfe.

Il capitolo 4 — **Svanimento della coomologia e problemi di estensione per semi q -corone** — è principalmente basato su di un articolo in collaborazione con Giuseppe Tomassini [3], in cui sono state introdotte per la prima volta le semi q -corone. Le *semi q -corone* sono domini il cui bordo contiene una parte Levi-piatta, una q -pseudoconvessa e una q -pseudoconcava. In questo capitolo sono utilizzate tecniche coomologiche e risultati classici dovuti ad Andreotti e Grauert per dimostrare teoremi di estensione per funzioni olomorfe, meromorfe, divisori (ovvero sottoinsiemi analitici di codimensione uno) e sezioni di fasci coerenti.

Il capitolo 5 — **Coomologia delle semi 1-corone ed estensione di sottoinsiemi analitici** è principalmente basato sull’articolo [4]. È ben noto che lo svanimento o, più in generale, la finitezza della coomologia di fasci analitici gioca un ruolo di primo piano per l’estensione di oggetti analitici. Quindi il primo obbiettivo è stato quello di studiare la coomologia delle semi q -corone. Per applicare il metodo di Andreotti e Grauert (il lemma delle cunette e l’approssimazione) alle semi q -corone, bisogna riuscire a maneggiare i punti del bordo che sono in parte pseudoconvessi in parte pseudoconcavi allo stesso tempo. Il lemma delle cunette con cunette aperte non è vero in generale e l’idea è quindi quella di ottenere un lemma delle cunette per cunette chiuse, usando in modo cruciale un risultato locale di svanimento della coomologia, dovuto a Christine Laurent-Thiébaud e Jürgen Leiterer. Ciò ci permette di dimostrare un teorema di isomorfismo per i gruppi di coomologia e come corollario un teorema di finitezza per la coomologia delle semi q -corone chiuse. Questo porta ad un risultato più debole di quello dimostrato da Andreotti e Grauert per l’intera corona. Comunque il risultato ottenuto è sufficiente per dimostrare un teorema di

estensione per sottoinsiemi analitici e fasci coerenti, di profondità almeno tre, di una semi 1-corona aperta. Il capitolo è concluso da uno schizzo di possibili generalizzazioni dei risultati citati, alle semi q -corone e agli spazi di Stein.

Vale la pena menzionare che i risultati dei precedenti capitoli sono stati generalizzati ai q -collari in un terzo articolo, [5], all'epoca della discussione della tesi ancora in fieri. Un q -collare è un dominio in una q -corona il cui bordo ha due differenti componenti Levi-piatte.

La terza parte della tesi, capitoli 6–8, come già detto, è dedicata al problema del bordo in analisi complessa.

Nel capitolo 6 — **Il problema del bordo** — viene presentato il secondo problema principale trattato nella tesi. In parole povere, il problema del bordo è il seguente: data una sottovarietà di dimensione (reale) dispari di una varietà complessa, che condizioni sono necessarie e sufficienti affinché sia il bordo di una “varietà complessa”? (tra vigolette perché spesso si potranno ammettere anche soluzioni deboli) Il problema è stato massicciamente studiato da molti nel caso in cui il bordo è compatto. La massimale complessità (per varietà di dimensione CR positiva) o la condizione dei momenti (per le curve) sono state evidenziate come condizioni necessarie e sufficienti. In questo capitolo sono enunciati i risultati principali ottenuti negli ultimi cinquant'anni, a partire dal risultato di John Wermer sulle curve compatte del 1958. Vengono anche presentati schematicamente le dimostrazioni e le idee su cui sono basate. Tra gli altri enunciamo: il risultato di Stolzenberg sulle unioni di curve compatte in $\mathbb{C}^n$, il teorema di Harvey e Lawson sulle varietà compatte di dimensione qualsiasi in $\mathbb{C}^n$; inoltre diamo una panoramica dei risultati nei domini q -concavi e dei recenti approcci al problema in $\mathbb{C}P^n$.

Il capitolo 7 — **Bordi non compatti di varietà analitiche complesse** — è basato principalmente su un articolo in collaborazione con Giuseppe Della Sala [1]. Qui viene presentato un approccio ad una versione non compatta del teorema di estensione di Harvey-Lawson in domini strettamente convessi e strettamente pseudoconvessi che soddisfano la condizione $(\star)$ di Lupaciolu. Il metodo usato per la dimostrazione è il seguente: in primo luogo estendiamo localmente la varietà di dimensione dispari massimalmente complessa in una striscia, poi la affettiamo in varietà compatte per poter applicare il teorema di Harvey-Lawson fetta per fetta. Per ottenere la soluzione cercata, bisogna poi dimostrare che le varietà ottenute si organizzano in una varietà complessa. Questo punto cruciale della dimostrazione è basato su di una rappresentazione integrale della soluzione di Harvey-Lawson. Osserviamo che il risultato ottenuto non è valido per le curve. Il capitolo 7 è chiuso da alcune considerazioni sulla condizione $(\star)$ di Lupaciolu.

Infine, la tesi è conclusa dal capitolo 8 — **Estensione semilocale di sottovarietà massimalmente complesse** — basato su [2]. Qui viene affrontato il problema del bordo nella seguente situazione semilocale: dato un aperto A del bordo di un dominio strettamente pseudoconvesso $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, qual è un dominio $D \subset \Omega$ naturale a cui tutte le sottovarietà reali di dimensione dispari massimalmente complesse M di A si

estendono? Usando i metodi del capitolo precedente viene data una (parziale) risposta al problema, che collega il dominio D in cui esiste l'estensione con l'involuppo di bA . Il problema della massimalità di A tra i domini con questa proprietà è ancora aperto. I metodi usati in questa situazione sono essenzialmente quelli del capitolo precedente, ma con alcune migliorie. Nel caso particolare $A = b\Omega$ miglioriamo i risultati di [1].

La tesi è dotata di una ampia bibliografia che fornisce referenze per ulteriori letture nell'ampio campo dell'estensione di oggetti analitici.

BIBLIOGRAFIA

- [1] DELLA SALA G. and SARACCO A., *Non-compact boundaries of complex analytic varieties*, Int. J. Math., **18** (2007), 203-218.
- [2] DELLA SALA G. and SARACCO A., *Semi-global extension of maximally complex submanifolds*, arXiv:math/0607747 [math.CV] (2006).
- [3] SARACCO A. and TOMASSINI G., *Cohomology and extension problems for semi q -coronae*, Math. Z., **256** (2007), 737-748.
- [4] SARACCO A. and TOMASSINI G., *Cohomology of semi 1-coronae and extension of analytic subsets*, Bull. Sci. math., **132** (2008), 232-245.
- [5] SARACCO A. and TOMASSINI G., *Cohomology and removable subsets*, arXiv:0802.0159 [math.CV] (2008).

Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata
e-mail: alberto.saracco@gmail.com
Perfezionamento presso la Scuola Normale Superiore, Pisa
Relatore di tesi: Prof. Giuseppe Tomassini