La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Emanuele Rodaro

HNN-estensioni ed amalgami di semigruppi inversi finiti

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 335–338.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_335_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 335-338

HNN-estensioni ed amalgami di semigruppi inversi finiti

EMANUELE RODARO

1. – Introduzione.

Si dice *semigruppo inverso* un semigruppo S in cui per ogni $a \in S$ esiste uno ed un solo elemento $\bar{a} \in S$ tale che $a\bar{a}a = a$ e $\bar{a}a\bar{a} = \bar{a}$, $\bar{a}$ viene detto *inverso* di a e indicato con a^{-1}. Il teorema di Vagner-Preston, che è l'analogo del teorema di Cayley per i gruppi, afferma che ogni semigruppo inverso può essere immerso nel semigruppo delle biezioni parziali su un insieme opportuno. Ne consegue che i semigruppi inversi sono strutture naturali in vari campi della matematica e dell'informatica teorica.

I semigruppi inversi costituiscono una varietà rispetto alle operazioni di prodotto e di inversione ed il semigruppo inverso libero su un insieme X, $FIS(X)$ risulta essere il quoziente del semigruppo libero $(X \cup X^{-1})^{+}$ (con $X^{-1} = \{x^{-1} | x \in X\}$) rispetto alla minima congruenza ν che rende il semigruppo inverso. Si dice che la coppia $\langle X|R\rangle$ ($R \subseteq (X \cup X^{-1})^{+} \times (X \cup X^{-1})^{+}$) è una *presentazione* del semigruppo inverso S e si scrive $S = Inv\langle X; R\rangle$ se S è isomorfo al semigruppo quoziente del semigruppo libero $(X \cup X^{-1})^{+}$ rispetto alla minima congruenza τ che contiene $R \cup \nu$. S si dice *finitamente presentato* se esiste una presentazione $\langle X|R\rangle$ di S in cui entrambi X ed R sono finiti. Il libro di Petrich [3] costitusce un'ottima referenza per approfondire nozioni e proprietà dei semigruppi inversi.

Questa tesi di dottorato si colloca nell'ambito della teoria combinatoria dei semigruppi inversi, ovvero dello studio di tali semigruppi individuati attraverso le loro presentazioni e considera in particolare i semigruppi ottenuti da semigruppi inversi finiti attraverso due costruzioni che hanno avuto un ruolo fondamentale nella teoria combinatoria dei gruppi: le HNN-estensioni ed i prodotti liberi con amalgama.

Il prodotto libero con amalgama di due semigruppi inversi è definito attraverso il solito diagramma universale (nella categoria dei semigruppi inversi) ed un importante risultato di Hall prova che ogni amalgama di semigruppi inversi è immergibile nel prodotto libero con amalgama associato all'amalgama considerato. Il concetto di HNN-estensione nel caso dei gruppi è stato introdotto da Higman, Neumann e Neumann i quali hanno provato che ogni gruppo G contenente due sottogruppi isomorfi A_1 ed A_2 è sempre immergibile in un gruppo H in cui A_1 ed A_2 sono coniugati. L'immergibilità di G in H discende, nel caso dei gruppi, dal lemma di Britton, che non vale nei semigruppi inversi. Questo ha dato origine a qualche ambiguità sul modo di estendere la definizione di HNN-estensione ai semigruppi inversi e sostanzialmente ha portato a due diverse definizioni, una dovuta a Yamamura [2], l'altra dovuta a Gilbert, che garantiscono entrambe la proprietà di immergibilità. Nella tesi è stata presa in considerazione la definizione di HNN-estensione secondo Yamamura.

Uno dei principali problemi nello studio di strutture date attraverso la loro presentazione è stabilire se il problema della parola sia o no decidibile. Una nozione cruciale nella soluzione del problema della parola in classi di semigruppi inversi è quella di *automa di Schützenberger* $\mathcal{A}(X, R, w)$ di una parola $w \in (X \cup X^{-1})^+$ rispetto alla presentazione $\langle X|R\rangle$ di un semigruppo inverso. Questi sono la naturale generalizzazione, al caso di semigruppi inversi, della nozione di grafo di Cayley di un gruppo. Sia $S = Inv\langle X; R\rangle \simeq (X \cup X^{-1})^+/\tau$, consideriamo la relazione di Green $\mathcal{R}$ definita ponendo $a\mathcal{R}b$ se e solo se $aS \cup \{a\} = bS \cup \{b\}$ e chiamiamo grafo di Schützenberger di $w \in (X \cup X^{-1})^+$ rispetto ad $\langle X|R\rangle$ il grafo orientato $S\Gamma(w)$ i cui vertici sono gli elementi della $\mathcal{R}$-classe di $w\tau$ e i cui archi sono tutte e sole le terne (v_1, x, v_2) tali che $v_1, v_2 \in R_{w\tau}$, $x \in X \cup X^{-1}$ e $v_1(x\tau) = v_2$. Questo grafo risulta essere un grafo connesso tale che per ogni arco etichettato x da v_1 a v_2 esiste uno ed un solo arco etichettato x^{-1} da v_2 a v_1, inoltre è deterministico, ovvero non esistono due archi distinti che partono dallo stesso vertice comune etichettati dallo stesso elemento $x \in (X \cup X^{-1})$. $\mathcal{A}(X, R, w) = ((ww^{-1})\tau), S\Gamma(w), w\tau)$ è l'automa costruito sul grafo $S\Gamma(w)$ prendendo come stati iniziale e finale rispettivamente $(ww^{-1})\tau$ e $w\tau$. Stephen in [4] ha illustrato una procedura iterativa per ottenere $\mathcal{A}(X, R, w)$ come limite diretto di un sistema diretto di automi a partire dall'automa lineare di w. Tale procedura si basa su due operazioni fondamentali: la determinizzazione e l'espansione, la prima identifica coppie di archi con la stessa etichetta uscenti da uno stesso vertice dell'automa, la seconda aggiunge un cammino etichettato da $r \in (X \cup X^{-1})^*$ da un v ad un vertice v' se c'è un cammino da v a v' etichettato da $s \in (X \cup X^{-1})^*$ con $(r, s) \in R \cup R^{-1}$. Stephen ha provato che per ogni $w, w' \in (X \cup X^{-1})^+$, $w\tau = w'\tau$ se e solo se $\mathcal{A}(X, R, w) \simeq \mathcal{A}(X, R, w')$.

Applicando in modo opportunamente ordinato le due operazioni fondamentali, Cherubini, Meakin e Piochi hanno provato in [1] che il problema della parola è decidibile nel prodotto libero con amalgama di semigruppi inversi finiti.

2. – HNN-estensioni di semigruppi inversi finiti.

La prima parte del lavoro è stata dedicata al problema della parola per HNN-estensioni di semigruppi inversi finiti. Si è fatto uso della seguente definizione di HNN-estensione:

DEFINIZIONE 1 ([2]). – *Sia S un semigruppo inverso e sia $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$ un isomorfismo tra due sottosemigruppi inversi A_1, A_2 di S. Siano $e \in A_1 \subseteq eSe$ e $f \in A_2 \subseteq fSf$ due idempotenti (oppure $e \notin A_1 \subseteq eSe$ e $f \notin A_2 \subseteq fSf$). Il semigruppo inverso $S^* = Inv\langle S, t\,;\ t^{-1}at = a\varphi, t^{-1}t = f, tt^{-1} = e, \forall a \in A_1\rangle$ è chiamato l' HNN-estensione di S associata a $\varphi : A_1 \longrightarrow A_2$.*

Se $S = Inv\langle X; R\rangle$, la presentazione $\langle X \cup \{t\}|R \cup \{t^{-1}at = a\varphi, t^{-1}t = f, tt^{-1} = e|a \in A_1\}\rangle$ sarà indicata da $\langle \overline{X}|R_{HNN}\rangle$ e chiamata presentazione canonica di S^*.
Con una procedura simile a quella usata in [1], ma che differisce da quella in vari aspetti tecnici, si è provato il seguente risultato.

TEOREMA 1. – *In ogni HNN-estensione di semigruppi inversi finiti il problema della parola è decidibile.*

La decidibilità del problema della parola è stato ricondotto ad un algoritmo che stabilisce, per ogni coppia di parole $w_1, w_2 \in (\overline{X} \cup \overline{X}^{-1})^+$, se w_1 appartiene al linguaggio riconosciuto da $\mathcal{A}(\overline{X}, R_{HNN}, w_2)$, che risulta essere un automa in generale infinito con una struttura particolare.

I *lobi* del grafo $S\Gamma(w)$ soggiacente a $\mathcal{A}(\overline{X}, R_{HNN}, w_2)$, ovvero i sottografi massimali con archi etichettati da elementi di S, risultano particolari quozienti deterministici di automi di Schützenberger di parole in $(X \cup X^{-1})^+$ rispetto a $\langle X|R\rangle$ in cui non possono più essere effettuate espansioni relative ad R. Inoltre il *grafo dei lobi* di $S\Gamma(w)$, i cui vertici sono i lobi di $S\Gamma(w)$, e in cui c'è un arco dal vertice Δ_1 al vertice Δ_2 se e solo se in $S\Gamma(w)$ vi è un arco etichettato da t che va da un vertice di Δ_1 ad un vertice di Δ_2, è un albero orientato.

3. – HNN-estensioni vs amalgami.

Ricordiamo che se $S_i = Inv\langle X_i; R_i\rangle,\ i = 1, 2$, sono semigruppi inversi tali che $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, il prodotto libero $S_1 * S_2$ è il coprodotto di S_1 ed S_2 nella categoria dei semigruppi inversi; se poi U è un semigruppo inverso immergibile in ogni $S_i,\ i = 1, 2$ tramite l'immersione ω_i, la terna $[S_1, S_2; U]$ si chiama *amalgama* di S_1 ed S_2 con cuore U ed il prodotto libero con amalgama $S_1 *_U S_2$ associato a $[S_1, S_2; U]$ è un pushout nella categoria dei semigruppi inversi. Inoltre detti λ_i due monomorfismi da U a $(X_i \cup X_i^{-1})^+$ tali che $\lambda_i(u)$ sia un rappresentante di $\omega_i(u)$ in S_i, $\langle X_1 \cup X_2 | R_1 \cup R_2 \cup \{(\lambda_1(u), \lambda_2(u)) | u \in U\}\rangle$ è una presentazione di $S_1 *_U S_2$, detta nel seguito presentazione canonica del prodotto libero con amalgama.

Come Lyndon e Schupp notano le due costruzioni di prodotto libero con amalgama e di HNN-estensione nel caso dei gruppi possono essere considerate come il caso sconnesso ed il caso connesso di una stessa idea di base.

Abbiamo dimostrato che un collegamento naturale fra le due costruzioni esiste anche nel caso dei semigruppi inversi. Sussiste infatti il seguente

TEOREMA 2. – *Con la notazione precedente, siano $e_i,\ i = 1, 2$ due simboli distinti non appartenenti ad X_i e siano $S_i^{e_i}$ i semigruppi S_i con aggiunte le unità e_i, $i = 1, 2$. Sia $S = S_1^{e_1} * S_2^{e_2}$ il prodotto libero dei semigruppi $S_i^{e_i},\ i = 1, 2$, e sia U^1 il semigruppo U con 1 come unità aggiunta. Si indichino con $\omega_i', i = 1, 2$, le immersioni di U^1 in $S_i^{e_i}$ che estendono naturalmente ω_i e si ponga $U_i = \omega_i'(U^1)$. Sia $(\omega_1')^{-1} : U_1 \to U^1$ la funzione inversa di ω_1', pensata come biezione fra U^1 ed U_1. Sia S^* la HNN-estensione di S associata a $\omega_1^{-1} \circ \omega_2 : U_1 \to U_2$. Sia ρ la congruenza di S^* generata dalle relazioni $t = e_1, t = e_2$ e sia $(S_1 *_U S_2)^1$ il semigruppo $S_1 *_U S_2$ con unità aggiunta 1. Allora i semigruppi inversi S^*/ρ e $(S_1 *_U S_2)^1$ sono isomorfi.*

Questo teorema si riflette in modo naturale sui grafi di Schützenberger. Infatti, il grafo di Schützenberger $\Gamma(w)$ di una parola $w = w_{1,1}w_{2,1}w_{1,2}...w_{1,n}w_{2,n}$, con $w_{1,1} \in (X_1 \cup X_1^{-1})^*$, $w_{1,j+1} \in (X_1 \cup X_1^{-1})^+$, $w_{2,j} \in (X_2 \cup X_2^{-1})^+$, $1 \le j \le n-1$, $w_{2,n} \in (X_2 \cup X_2^{-1})^*$, rispetto alla presentazione standard di $S_1 *_U S_2$, si può ottenere dal grafo di Schützenberger di $w' = w_{1,1}e_1te_2w_{2,1}e_2t^{-1}e_1w_{1,2}e_1t \dots t^{-1}e_1w_{1,n}e_1te_2w_{2,n}$ rispetto alla presentazione standard della HNN-estensione H^* identificando i vertici iniziali e finali di ogni arco etichettato da t ed eliminando i loop così ottenuti. È così possibile ritrovare, nel caso di S_1, S_2 finiti, i risultati di [1] e stabilire caratteristiche degli automi di Schützenberger. In particolare è possibile introdurre anche per questi automi la nozione di grafo dei lobi. Infatti, se $S\Gamma(w)$ denota il grafo di Schützenberger di un elemento $w \in ((X_1 \cup X_1^{-1}) \cup (X_2 \cup X_2^{-1}))^+$ rispetto alla presentazione canonica di prodotto con amalgama, un sottografo massimale di $S\Gamma(w)$ i cui archi sono etichettati da elementi di $X_i \cup X_i^{-1},\ i = 1, 2$ si dice lobo colorato da i. Il grafo dei lobi di $S\Gamma(w)$ è il grafo semplice il cui insieme di vertici è l'insieme dei lobi di $S\Gamma(t)$ e due lobi sono connessi da un arco se e solo se hanno almeno un vertice in comune ed anche in questo caso risulta essere un albero.

4. – Sottogruppi massimali di $S_1 *_U S_2$.

La struttura ad albero del grafo dei lobi degli automi di Schützenberger nei prodotti liberi con amalgama si è rivelata importante per determinare alcune proprietà di struttura dei prodotti stessi. È ben noto che, considerata in un semigruppo S la relazione di Green $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ dove $\mathcal{L}$ è definita ponendo $a\mathcal{L}b$ se e solo se $Sa \cup \{a\} = Sb \cup \{b\}$, le $\mathcal{H}$-classi H_e che contengono un idempotente sono sottogruppi massimali di S. Stephen in [4] ha mostrato che in $S = Inv\langle X; R\rangle, H_e \simeq Aut(S\Gamma(e))$ ove $S\Gamma(e)$ è il grafo di Schützenberger di un idempotente e rispetto a $\langle X|R\rangle$. Quindi lo studio dei sottogruppi massimali di $S_1 *_U S_2$ si può ridurre allo studio degli automorfismi dei grafi di Schützenberger di idempotenti di $S_1 *_U S_2$. Inoltre H_e agisce sull'albero dei lobi. Quindi abbiamo applicato la teoria di Bass-Serre sull'azione di gruppi su alberi per dedurre una serie di proprietà dei sottogruppi massimali di $S_1 *_U S_2$. Per esempio abbiamo dimostrato che i sottogruppi massimali sono virtualmente liberi ed abbiamo dato un algoritmo per calcolare la presentazione di H_e. Abbiamo inoltre dato delle condizioni necessari e sufficienti affinché i sottogruppi massimali siano infiniti, in tal caso questi sottogruppi sono o HNN-estensioni o amalgami di gruppi, caratterizzando anche i casi in cui risultano HNN-estensioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Cherubini, J. Meakin and B. Piochi, *Amalgams of Finite Inverse Semigroups*, Journal of Algebra, **285** (2005), 706-725.

[2] A. Yamamura, *HNN extensions of inverse semigroups and applications*, Internat. J. Algebra Comput., **7** (5) (1997), 605-624.

[3] M. Petrich, *Inverse Semigroups*, Wiley, New York (1984).

[4] J. B. Stephen, *Presentation of Inverse Monoids*, Journal of Pure and Applied Algebra, **198** (1990), 81-112.

Dipartimento di Matematica "Francesco Brioschi", Politecnico di Milano
e-mail: emanuele.rodaro@mate.polimi.it
Dottorato in Matematica
(sede amministrativa: Università degli Studi di Milano) - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Prof.ssa Alessandra Cherubini. Politecnico di Milano