La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Tiziana Raparelli

Comportamento asintotico di campi a massa nulla di spin 1 e 2 che si propagano su spazitempo di background curvi

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 331–334.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_331_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 331-334

Comportamento asintotico di campi a massa nulla di spin 1 e 2 che si propagano su spazitempo di background curvi

TIZIANA RAPARELLI

Il lavoro si inserisce nell'ambito della teoria della Relatività Generale, in particolare riguarda un problema specifico dello spaziotempo di Kerr. Per inquadrare meglio il problema, iniziamo ricordando alcune definizioni di base.

DEFINIZIONE 1. – *Uno spaziotempo di Einstein vuoto,* $(\mathcal{M}, g)$*, è una varietà quadridimensionale* $\mathcal{M}$ *dotata di una metrica lorenziana* g*, che soddisfa il seguente set di equazioni*

$$R_{\mu\nu} = 0\,. \tag{1}$$

Il tensore di Ricci $R_{\mu\nu}$ *è la contrazione del tensore di curvatura di Riemann* $R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\mu\rho\nu\sigma}$*. In presenza di campi elettromagnetici e di materia le equazioni di Einstein sono*

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 4\pi T_{\mu\nu}\,,$$

dove R è lo scalare di curvature e $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso associato alla materia ed ai campi elettromagnetici presenti nello spaziotempo.

Le soluzioni di (1) sono spazitempo in cui non è presente materia né radiazione elettromagnetica, infatti corrispondono al set di equazoni

$$T_{\mu\nu} = 0.$$

La grande difficoltà nello studio delle equazioni di Einstein è dovuta alla loro natura intrinsecamente non lineare, legata al fatto che il tensore di Ricci dipende non linearmente dalla metrica g e dalle sue derivate prime e seconde.
Una volta risolte queste equazioni, e supposti assegnati dei dati iniziali, possiamo ottenere dalla metrica g, soluzione di queste equazioni, il tensore di Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ (che per gli spazitempo vuoti coincide con l'intero tensore) che soddisfa le equazioni di Bianchi:

$$D^{\mu} R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0. \tag{2}$$

Si conoscono poche soluzioni esatte delle equazioni di Einstein nel vuoto, tutte ottenute imponendo allo spaziotempo delle particolari proprietà di simmetria. Lo spaziotempo di Kerr, scoperto nel 1965, è uno spaziotempo stazionario e simmetrico rispetto ad un fissato asse di rotazione. Fisicamente ha un significato molto importante poichè descrive la geometria dello spaziotempo generato intorno ad un corpo rotante e, in particolare, intorno ad un buco nero rotante.

In questo lavoro abbiamo studiato le seguenti equazioni

$$D^{\mu} W_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \tag{3}$$

essendo D la derivata covariante fatta rispetto alla metrica di Kerr, pensata come metrica assegnata, e W un campo tensoriale a massa nulla e spin 2, con dati iniziali sufficientemente vicini (in un senso che spiegheremo piú nel dettaglio nel seguito) ai dati iniziali del tensore di Riemann dello spaziotempo di Kerr. Tale problema può essere visto come una (parte della) linearizzazione delle equazioni di Einstein. Il problema è strettamente collegato alla stabilità globale dello spaziotempo di Kerr. Infatti il tensore di Riemann di uno spaziotempo vuoto è un campo a massa nulla e spin 2, dunque studiare (3), richiedendo decadimenti iniziali compatibili con quelli di Kerr, equivale a studiare una versione linearizzata delle equazioni di Bianchi soddisfatte dalla parte conforme del tensore di Riemann di una perturbazione dello spaziotempo di Kerr. Inoltre riguardo lo spaziotempo di Kerr, non si sa se sia asintoticamente semplice, in quanto non se ne conosce esplicitamente l'isometria conforme Ω, [1], tuttavia le sue componenti nulle del tensore di Riemann decadono lungo le direzioni dell'infinito nullo come prescritto dal teorema del Peeling [2] perciò risulta essere soddisfatta una condizione necessaria per l'asintotica semplicità.

Dunque questo lavoro costituisce un passo intermedio verso la dimostrazione del peeling per perturbazioni piccole dello spaziotempo di Kerr.

La strategia usata segue l'approccio introdotto da Klainerman e Nicolò in [3] e [4], in cui un passo fondamentale è l'introduzione di una famiglia di norme integrali L^2 pesate, sulle ipersuperfici nulle corrispondenti ai coni nulli entranti ed uscenti dello spaziotempo di Minkowski. Queste norme, $\mathcal{Q}_k$, $\underline{\mathcal{Q}}_k$, sono una generalizzazione delle norme classiche dell'energia (fatte rispetto al tensore metrico), costruite a partire dal tensore W e delle sue derivate di Lie (fatte rispetto ad i campi vettoriali di Killing e di pseudo-Killing dello spaziotempo) fino al secondo ordine.

D'altra parte usando l'approccio di Klainerman-Nicolò e guardando il comportamento asintotico di un campo a massa nulla e spin 2 W con dati iniziali compatibili con i dati del tensore di curvatura dello spaziotempo di Kerr, risulta che quattro delle dieci componenti nulle di W decadono più lentamente di quanto prescritto da teorema del Peeling. È tuttavia ragionevole aspettarsi che questo problema sia dovuto all'impiego di tecniche troppo restrittive nella dimostrazione dei risultati, e che, modificandole, si possano migliorare i decadimenti suddetti. Abbiamo dunque inserito nelle norme dell'energia un fattore di peso della forma $u^{5+\varepsilon}$, dove u è il parametro ottico "ritardato". Questo fattore di peso ha portato, con una lunga procedura, a migliorare i comportamenti asintotici delle componenti nulle di W. Però con questa modifica è sorto un problema di altro genere: se W mima il comportamento asintotico del tensore di Riemann associato allo spaziotempo di Kerr, allora queste nuove norme costruite a partire da W diventano infinite lungo le direzioni dell'infinito spaziale. Un modo per eliminare i fattori che divergono è basato di nuovo sull'idea che il problema che consideriamo deve essere connesso al problema di risolvere le equazioni di Einstein per dati iniziali vicini allo spaziotempo di Kerr. Dunque possiamo cercare una soluzione W della forma

$$W = W^{(Kerr)} + \delta W, \tag{4}$$

dove $W^{(Kerr)}$ è il tensore di curvatura dello spaziotempo di Kerr a δW è una perturbazione non lineare piccola.

Questa è stata l'idea originale del lavoro, e dunque l'introduzione di nuove norme integrali $\tilde{\mathcal{Q}}_k$ e $\tilde{\underline{\mathcal{Q}}}_k$, fatte rispetto al campo $\mathcal{L}_{T_0}W$ (e di sue opportune derivate di Lie prime e seconde), essendo T_0 il campo vettoriale che genera la simmetria temporale dello spaziotempo di Kerr. In questo lavoro abbiamo dimostrato che ogni soluzione globale di (3) decade come previsto dal teorema del Peeling, a patto che il campo $\mathcal{L}_{T_0}\delta W$ abbia opportuni decadimenti iniziali. Ciò suggerisce che anche nel caso più complicato delle equazioni di Einstein il teorema del Peeling, condizione necessaria per la semplicità asintotica degli spazitempo "vicini" a Kerr dovrebbe essere soddisfatta.

I passi fondamentali sono stati i seguenti:

1) L'introduzione di coordinate nulle $(u, \underline{u}, \theta, \phi)$, di un null frame associato $\{e_3, e_4, e_a\}_{a=\theta,\phi}$ e conseguentemente di una doppia foliazione nulla dello spaziotempo.

2) Le stime delle quantità peculiari della geometria dello spaziotempo di Kerr (coefficienti di connessione, tensori di deformazione dei campi vettoriali quasi-Killing).

3) La dimostrazione della limitatezza delle norme $\tilde{\mathcal{Q}}_k$ in termini dei loro valori iniziali (su Σ_0), limitati anch'essi.

4) I decadimenti di W trovati integrando nel tempo le componenti di $\mathcal{L}_{T_0}\delta W$ e sommando ad essi $W^{(Kerr)}$.

Tecnicamente il lavoro è risultato complesso, con una grande quantità di calcoli, a causa delle numerose quantità da stimare. In particolare, il passo 3) è risultato molto lungo e laborioso.

Esattamente abiamo dimostrato il seguente risultato:

TEOREMA 1. – *Sia W una soluzione delle equazioni di Bianchi nello spaziotempo di Kerr e indichiamo con $\tilde{W}$ il campo tensoriale $\mathcal{L}_{T_0}W$. Supponiamo che le componenti nulle di $\tilde{W}$ $(\alpha(\tilde{W}), \underline{\alpha}(\tilde{W}), \beta(\tilde{W}), \underline{\beta}(\tilde{W}), \rho(\tilde{W}), \sigma(\tilde{W}))$ (1) sull'ipersuperficie*

(1) Per la definizione delle componenti nulle di un campo a massa nulla e spin 2 vedere [3].

iniziale di genere spazio Σ_0 decadano tutte come $r^{-(6+\varepsilon)}$. Allora le componenti nulle di W lungo le direzioni dell'infinito nullo soddisfano i seguenti comportamenti asintotici:

$$\sup_{\mathcal{K}} r^5|u|^{\varepsilon'}|\alpha(W)| \leq C_0, \quad \sup_{\mathcal{K}} r^4|u|^{1+\varepsilon'}|\beta(W)| \leq C_0$$
$$\sup_{\mathcal{K}} r^3|\rho(W)| \leq C_0, \quad \sup r^3|u|^{2+\varepsilon'}|\sigma(W)| \leq C_0$$
$$\sup_{\mathcal{K}} r^2|u|^{3+\varepsilon'}|\underline{\beta}(W)| \leq C_0, \quad \sup_{\mathcal{K}} r|u|^{4+\varepsilon'}|\underline{\alpha}(W)| \leq C_0,$$

con $\varepsilon' = \dfrac{1}{2}\varepsilon$ e C_0 essendo una costante dipendente solo dai dati iniziali.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Penrose, *Zero Rest-mass Fields Including Gravitation: Asymptotic Behaviour*, Proceeding Royal Society of London, **A284** (1969), 159-203.

[2] J. Stewart *Advanced General Relativity*, Cambridge University Press (1993).

[3] S. Klainerman and F. Nicolò, *The Evolution Problem in General Relativity*, Birkhauser (2003).

[4] W. Israel and F. Praetorius, *Quasi-Spherical Light Cones of the Kerr Geometry*, Classical Quantum Gravity, **15** (1998), 2289-2301.

[5] S. Klainerman and F. Nicolò, *Peeling Properties of Asymptotically Flat Solutions to the Einstein Vacuum Equations*, Classical Quantum Gravity, **20** (2003), 3215-3257.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: raparel@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Bologna) -Ciclo XIX
Relatore della tesi: Prof. Francesco Nicolò, Università di Roma "Tor Vergata"
Correlatore della tesi: Prof. Alberto Parmeggiani, Università di Bologna