
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIAMPIERO PALATUCCI

Una classe di problemi di transizione di fase con l'effetto di tensione di linea

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1 (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 323–326.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_323_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_323_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Una classe di problemi di transizione di fase con l'effetto di tensione di linea

GIAMPIERO PALATUCCI

1. – Transizioni di fase con tensione di linea.

Il nostro lavoro di ricerca nell'ambito del Dottorato in Matematica è legato allo studio di problemi di transizione di fase liquido-liquido, da un punto di vista variazionale.

In letteratura vi sono molte varianti di funzionali del Calcolo delle Variazioni che descrivono fenomeni di transizioni di fase. Il punto di partenza della nostra ricerca è in alcuni lavori di Alberti, Bouchitté e Seppecher, che trattano di un problema collegato a transizioni di fase in un contenitore $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con effetti sul bordo di tipo “tensione di linea”. Questo problema è descritto da un funzionale costituito da una perturbazione singolare dall'effetto regolarizzante e da due potenziali a più “buche” (le fasi, appunto), uno sul dominio Ω e l'altro sulla frontiera $\partial\Omega$. In [1], Alberti, Bouchitté e Seppecher hanno analizzato, in termini di Γ -convergenza, il comportamento asintotico, per ε che va a 0, della seguente famiglia di energie

$$E_\varepsilon(u) := \varepsilon \int_{\Omega} |Du|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} W(u) dx + \lambda_\varepsilon \int_{\partial\Omega} V(Tu) d\mathcal{H}^2 \quad (u \in H^1(\Omega)),$$

dove W e V sono i potenziali a doppio pozzo, con zeri rispettivamente in $\{a, \beta\}$ e $\{a', \beta'\}$, Tu indica la traccia di u su $\partial\Omega$, $\mathcal{H}^k$ indica la misura di Hausdorff k -dimensionale e λ_ε soddisfa

$$(1) \quad \varepsilon \log \lambda_\varepsilon \rightarrow c \in (0, +\infty) \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Il problema di cui ci siamo occupati riguarda il caso in cui la perturbazione singolare è super-quadratica. Siamo, quindi, interessati all'analisi asintotica della seguente famiglia di funzionali definita in $W^{1,p}(\Omega)$.

$$(2) \quad F_\varepsilon(u) := \varepsilon^{p-2} \int_{\Omega} |Du|^p dx + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{p-2}{p-1}}} \int_{\Omega} W(u) dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} V(Tu) d\mathcal{H}^2 \quad (p > 2).$$

Sia u_ε una successione equilimitata per F_ε . Il comportamento asintotico delle energie F_ε è descritto da un funzionale limite Φ , che è la somma di tre contributi: un'energia di superficie concentrata su Su , insieme dei salti di u (dove u_ε ha una transizione da a a β); un'energia di bordo su $\partial\Omega$ (dove u_ε ha una transizione da Tu a v); un'energia di linea su Sv (dove Tu_ε ha una transizione da a' a β').

Quindi, Φ dipende da due variabili u e v in $BV(\Omega, \{a, \beta\}) \times BV(\partial\Omega, \{a', \beta'\})$:

$$(3) \quad \Phi(u, v) = \sigma_p \mathcal{H}^2(Su) + c_p \int_{\partial\Omega} |\mathcal{W}(Tu) - \mathcal{W}(v)| d\mathcal{H}^2 + \gamma_p \mathcal{H}^1(Sv),$$

dove $\mathcal{W}$ è una primitiva di $W^{(p-1)/p}$; $c_p := \frac{p}{(p-1)^{p/(p-1)}}$; σ_p è la *tensione di superficie* data da $\sigma_p := c_p |\mathcal{W}(\beta) - \mathcal{W}(a)|$; γ_p è la *tensione di linea* ed è data dal problema di profilo ottimale

$$(4) \quad \gamma_p := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^2} |Du|^p dx + \int_{\mathbb{R}} V(Tu) d\mathcal{H}^1 : u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+^2), \lim_{t \rightarrow -\infty} Tu(t) = a', \lim_{t \rightarrow +\infty} Tu(t) = \beta' \right\}.$$

Osserviamo che la variazione della potenza del gradiente nel termine di perturbazione non è una semplice generalizzazione rispetto al caso quadratico. Occorre tener conto dei differenti termini di riscaldamento in ε (che seguono da un'analisi di scala). Nel caso quadratico, infatti, il riscaldamento logaritmico (1) rende il profilo della transizione irrilevante; non abbiamo "equipartizione dell'energia". Al contrario, tale profilo diventa cruciale nel caso super-quadratico, dove vi è equipartizione dell'energia. Questa caratteristica è stata un'arma a doppio taglio nella dimostrazione del risultato di Γ -convergenza: alcuni argomenti sono risultati semplificati dalla presenza di un problema di profilo ottimale, altri hanno richiesto maggiore attenzione.

Il risultato principale di convergenza è nel seguente teorema.

TEOREMA 1. – [5, Theorem 2.1]. *Siano $F_\varepsilon : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Phi : BV(\Omega, \{a, \beta\}) \times BV(\partial\Omega, \{a', \beta'\}) \rightarrow \mathbb{R}$ definiti da (2) e (3). Allora*

(i) (Compattezza) *Se $(u_\varepsilon) \subset W^{1,p}(\Omega)$ è una successione tale che $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ è limitato, allora $(u_\varepsilon, Tu_\varepsilon)$ è precompatta in $L^1(\Omega) \times L^1(\partial\Omega)$ e ogni punto di accumulazione appartiene a $BV(\Omega, \{a, \beta\}) \times BV(\partial\Omega, \{a', \beta'\})$.*

(ii) (Disuguaglianza del Lim Inf) *Per ogni $(u, v) \in BV(\Omega, \{a, \beta\}) \times BV(\partial\Omega, \{a', \beta'\})$ e per ogni successione $(u_\varepsilon) \subset W^{1,p}(\Omega)$ tali che $u_\varepsilon \rightarrow u$ in $L^1(\Omega)$ e $Tu_\varepsilon \rightarrow v$ in $L^1(\partial\Omega)$,*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \Phi(u, v).$$

(iii) (Disuguaglianza del Lim Sup) *Per ogni $(u, v) \in BV(\Omega, \{a, \beta\}) \times BV(\partial\Omega, \{a', \beta'\})$ esiste una successione $(u_\varepsilon) \subset W^{1,p}(\Omega)$ tale che $u_\varepsilon \rightarrow u$ in $L^1(\Omega)$, $Tu_\varepsilon \rightarrow v$ in $L^1(\partial\Omega)$ e*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \Phi(u, v).$$

La dimostrazione del Teorema 1 necessita di varie tappe, nelle quali deduciamo i termini dell'energia limite Φ localizzando tre effetti: l'effetto "bulk", l'effetto delle pareti del recipiente e l'effetto di bordo.

Nell'effetto "bulk", l'energia limite è valutata come in [3]. È evidente che occorre utilizzare la versione super-quadratica del funzionale di Modica-Mortola. Dunque, è sufficiente eseguire le dovute modifiche per poter sfruttare la proprietà di ri-scalamento ottimale del funzionale super-quadratico e, come nel caso studiato da Modica, la formula di coarea.

Il secondo termine di Φ può essere ottenuto adattando dei risultati di Modica in un articolo del 1987. In [4], Modica ha studiato un funzionale con crescita quadratica nel termine di perturbazione singolare e con un contributo di bordo del tipo $\lambda \int_{\partial\Omega} g(Tu) d\mathcal{H}^2$, dove λ non dipende da ε e g è una funzione continua e positiva. Occorre, quindi, modificare parte dei risultati ([4, Proposizione 1.2] e [4, Proposizione 1.4]) per il nostro scopo.

L'effetto di bordo necessita di un'analisi più delicata. Vediamo la strategia a grandi tratti. Prima, ci riduciamo al caso in cui il bordo è piatto, poi studiamo il comportamento asintotico dell'energia originale su semi-palle tridimensionali; quindi riduciamo il problema di una dimensione con un argomento di "slicing". A questo punto, il problema principale diventa l'analisi del comportamento asintotico del funzionale bidimensionale seguente:

$$H_\varepsilon(u) := \varepsilon^{p-2} \int_{D_1} |Du|^p dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{E_1} V(Tu) d\mathcal{H}^2,$$

dove D_1 è il semi-disco in $\mathbb{R}^2$ ed E_1 è il suo "diametro" (cfr. [5, Section 3]).

Infine, con un argomento di riarrangiamento monotono lungo una direzione, abbiamo provato che il minimo in (4) è raggiunto da una funzione φ in $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^2)$, la cui traccia su $\mathbb{R}$ è una funzione non decrescente ([5, Proposition 4.7]).

2. – Un risultato di perturbazione singolare con una norma frazionaria.

Un primo passo per la comprensione del problema principale della nostra tesi di Dottorato è costituito dallo studio di un funzionale unidimensionale del tipo di Modica-Mortola con perturbazione non locale con crescita super-quadratica. Nel Capitolo 3 della tesi (cfr. anche [2]), abbiamo analizzato il comportamento asintotico in termini di Γ -convergenza della seguente famiglia di energie in $W^{1-\frac{1}{p},p}(I)$, con I intervallo in $\mathbb{R}$:

$$(5) \quad G_\varepsilon(u) := \varepsilon^{p-2} \iint_{I \times I} \left| \frac{u(x) - u(y)}{x - y} \right|^p dx dy + \frac{1}{\varepsilon} \int_I V(u) dx, \quad (p > 2),$$

dove V è un potenziale a doppio pozzo con buche in a' e β' . Il funzionale G_ε soddisfa una proprietà di buon riscaldamento e quindi il limite è caratterizzato da un problema di profilo ottimale; i.e., G_ε Γ -converge (in $L^1(I)$) a

$$(6) \quad G(u) := \gamma \mathcal{H}^0(Su),$$

dove γ rappresenta il costo minimo, in termini dell'energia non riscalata, di una transizione da a' a β' sull'intera retta reale:

$$(7) \quad \gamma := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \left| \frac{v(x) - v(y)}{x - y} \right|^p dx dy + \int_{\mathbb{R}} V(v) dx : v \in W_{\text{loc}}^{1-\frac{1}{p}, p}(\mathbb{R}), \right. \\ \left. \lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = a', \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \beta' \right\}.$$

TEOREMA 2. – [2, Theorem 2.1]. – *Siano $G_\varepsilon : W^{1-\frac{1}{p}, p}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : BV(I, \{a', \beta'\}) \rightarrow \mathbb{R}$ definiti in (5) e (6). Allora*

(i) (Compattezza) *Se $(u_\varepsilon) \subset W^{1-\frac{1}{p}, p}(I)$ è una successione tale che $G_\varepsilon(u_\varepsilon)$ è limitato. Allora (u_ε) è precompatta in $L^1(I)$ e ogni punto di accumulazione appartiene a $BV(I, \{a', \beta'\})$.*

(ii) (Disuguaglianza del Lim Inf) *Per ogni $u \in BV(I, \{a', \beta'\})$ e per ogni successione $(u_\varepsilon) \subset W^{1-\frac{1}{p}, p}(I)$ tale che $u_\varepsilon \rightarrow u$ in $L^1(I)$,*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq G(u).$$

(iii) (Disuguaglianza del Lim Sup) *Per ogni $u \in BV(I, \{a', \beta'\})$ esiste una successione $(u_\varepsilon) \subset W^{1-\frac{1}{p}, p}(I)$ tale che $u_\varepsilon \rightarrow u$ in $L^1(I)$ e*

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq G(u).$$

Nella dimostrazione del Teorema 2, abbiamo utilizzato fortemente la “localizzazione” e le proprietà di riscaldamento di G_ε . Inoltre, un ruolo importante è stato giocato dalle proprietà di monotonia di G_ε rispetto a troncature e a riarrangiamenti monotoni. Grazie a un argomento di riarrangiamento monotono, abbiamo anche provato che il minimo in (7) è raggiunto e non banale ([2, Proposition 3.3]).

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALBERTI G., BOUCHITTÉ G. and SEPPECHER P., *Phase Transition with Line-Tension Effect*, Arch. Rational Mech. Anal., **144** (1998), 1-46.
- [2] GARRONI A. and PALATUCCI G., *A singular perturbation result with a fractional norm*, in Variational problems in material science, Progress in NonLinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, Basel, **68** (2006), 111-126.
- [3] MODICA L., *Gradient theory of phase transitions and minimal interface criterion*, Arch. Rational Mech. Anal., **98** (1987), 123-142.
- [4] MODICA L., *Gradient theory of phase transitions with boundary contact energy*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **5** (1987), 487-512.
- [5] PALATUCCI G., *Phase transitions with the line tension effect: the super-quadratic case*, submitted paper (2007).

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi “Roma Tre”

e-mail: palatucci@mat.uniroma3.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Roma Tre) - Ciclo XVIII

Direttore di tesi: prof. Adriana Garroni, Università di Roma “La Sapienza”