
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ELEONORA PALMIERI

Superfici numericamente di Godeaux con un automorfismo di ordine tre

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1 (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 319–322.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_319_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_319_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Superfici numericamente di Godeaux con un automorfismo di ordine tre

ELEONORA PALMIERI

È noto che le superfici complesse sono state classificate da Enriques e Kodaira secondo la loro dimensione di Kodaira κ , definita come segue

DEFINIZIONE 1. — Sia S una superficie. La **dimensione di Kodaira** di S è il numero

$$(1) \quad \kappa(S) := \max\{\dim \text{Im}(\phi_{|mK_S|} : S \longrightarrow \mathbb{P}^N), m \in \mathbb{N}\}$$

dove $\phi_{|mK_S|}$ è l'applicazione razionale definita su S dal sistema pluricanonico $|mK_S|$. Si pone inoltre $\kappa(S) = -\infty$ se $|mK_S| = \emptyset$ per ogni $m \geq 0$.

Mentre delle superfici con $\kappa \leq 1$ si conoscono molte proprietà, abbiamo meno informazioni sulle superfici di tipo generale, cioè quelle con $\kappa = 2$. La loro classificazione completa è tuttora un problema aperto nonostante gli importanti contributi di molti matematici (per maggiori approfondimenti si veda [1]).

Le superfici minimali di tipo generale si suddividono in classi secondo il valore di tre invarianti principali: l'autointersezione del divisore canonico K_S^2 , la caratteristica di Eulero olomorfa $\chi(S, \mathcal{O}_S)$ ed il genere geometrico $p_g(S) := h^0(S, \mathcal{O}_S(K_S)) = h^2(S, \mathcal{O}_S)$. Qui siamo interessati principalmente alle superfici con gli invarianti più bassi:

DEFINIZIONE 2. — Una **superficie numericamente di Godeaux** è una superficie complessa minimale di tipo generale S per cui $p_g(S) = 0$, $K_S^2 = 1$, $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$.

Il primo esempio di una tale superficie si trova in [3] ed è il quoziente di una quintica liscia di $\mathbb{P}^3$ con un'azione libera di $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Il suo gruppo di torsione è $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Si possono ottenere molte informazioni riguardo al gruppo di torsione di una superficie numericamente di Godeaux (che risulta essere un gruppo ciclico di ordine al più 5) studiando i punti base del suo sistema tricanonico $|3K_S|$, grazie ad un noto risultato di Miyaoka (vedi [5]).

Sappiamo inoltre (cf. [5] e [7]) che gli spazi dei moduli delle superfici numericamente di Godeaux con gruppi di torsione $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ sono irriducibili e di dimensione 8.

Come per ogni superficie di tipo generale $\text{Aut}(S)$ è un gruppo finito. Tuttavia determinare esplicitamente $\text{Aut}(S)$ resta ancora oggi un problema difficile.

Il caso più semplice è quello delle superfici S che ammettono un'involuzione, ossia un automorfismo di ordine due. Per quanto riguarda le superfici di Godeaux Keum e Lee in [4] studiano il luogo fisso dell'involuzione nell'ipotesi che il sistema bicanonico $|2K_S|$ non abbia componenti fisse.

Calabri, Ciliberto e Mendes Lopes in [2] completano lo studio rimuovendo questa ipotesi aggiuntiva. Usando la teoria dell'intersezione e quella dei rivestimenti abeliani ottengono il seguente teorema di classificazione:

TEOREMA 1. — *Una superficie numericamente di Godeaux S con un'involuzione è birazionalmente equivalente ad una delle seguenti:*

1. *un piano doppio di Campedelli;*
2. *un piano doppio diramato lungo una curva ridotta la quale si spezza in due rette distinte r_1, r_2 ed una curva di grado 12 con le seguenti singolarità:*
 - *il punto $q_0 = r_1 \cap r_2$ di molteplicità 4;*
 - *un punto $q_i \in r_i$, $i = 1, 2$ di tipo $[4, 4]$, con retta tangente r_i ;*
 - *altri tre punti q_3, q_4, q_5 di molteplicità 4 ed un punto q_6 di tipo $[3, 3]$, tali che non esistano coniche per $q_1, \dots, q_6$;*
3. *un rivestimento doppio di una superficie di Enriques diramato su una curva di genere aritmetico 2.*

In quest'ultimo caso il gruppo di torsione di S è $\text{Tors}(S) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, mentre nel caso 2 è $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ oppure $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Ricordiamo che un piano doppio di Campedelli è un piano doppio diramato lungo una curva di grado 10 con un punto quadruplo e 5 punti $[3, 3]$ non appartenenti ad una conica. Un esempio di tale piano si trova in [8].

Vogliamo estendere il metodo usato in [2] per classificare le superfici numericamente di Godeaux che ammettono un automorfismo σ di ordine tre.

Si ottiene il seguente risultato:

TEOREMA 2. — *Una superficie numericamente di Godeaux S non può ammettere automorfismi di ordine 3.*

Supponiamo dunque che esista una superficie numericamente di Godeaux S con un automorfismo di ordine 3. La superficie quoziente $\Sigma = S/\sigma$ è singolare nelle immagini dei punti fissi isolati per l'azione di σ su S . È possibile costruire una risoluzione liscia minimale del rivestimento $S \rightarrow \Sigma$, e cioè un diagramma commutativo

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varepsilon} & S \\ \pi \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{\eta} & \Sigma \end{array}$$

in cui X e Y sono superfici lisce e $\pi : X \rightarrow Y$ è un rivestimento triplo indotto da σ . Al rivestimento $\pi : X \rightarrow Y$ si applica quindi la teoria dei rivestimenti abeliani (vedi [6]).

Tramite la formula di Hurwitz e la caratteristica di Eulero topologica e è possibile stimare il numero di punti fissi isolati per l'azione di σ su S (le immagini di tali punti possono essere punti tripli ordinari oppure punti doppi di tipo A_2).

I casi possibili possono essere suddivisi in tre grandi famiglie a seconda dei valori di R_0K_S e h_2 , dove R_0 è la parte divisoriale del luogo di ramificazione di σ mentre h_2 è il numero di punti fissi isolati di σ che generano singolarità di tipo A_2 .

È anche importante studiare le proprietà della parte invariante $\mathcal{A}$ del sistema tricanonico $|\mathcal{A}_S|$. $\mathcal{A}$ può essere un pencil o una rete. Lo studio della sua immagine $|N|$ sulla superficie quoziente Y e dei suoi sistemi aggiunti è fondamentale per poter classificare la superficie quoziente e studiarla. Nel caso $|N|$ (e quindi $\mathcal{A}$) sia una rete, il suo primo aggiunto è un pencil e determina una fibrazione su Y . Il numero di fibre singolari di tale fibrazione è limitato da una nota formula

$$(3) \quad e(Y) = e(Y_{gen})e(B) + \sum_{b \in B} (e(Y_b) - e(Y_{gen})).$$

dove B è la base della fibrazione mentre Y_{gen} è la fibra generale (nel nostro caso rispettivamente $\mathbb{P}^1$ e la curva generale di $|N_1|$, il primo aggiunto di $|N|$). Si verifica abbastanza facilmente che tale limitazione non è rispettata. Ne segue che $|N|$ deve essere un pencil. Un'analisi delle fibre singolari della fibrazione indotta da $|N|$ permette di ridurre ulteriormente la lista di casi possibili e di dedurre che la superficie quoziente Y è sicuramente razionale.

I casi numerici rimanenti sono stati suddivisi in *casi del Pezzo* e *casi rigati* a seconda delle proprietà della superficie quoziente Y , che può essere lo scoppio di $\mathbb{P}^2$ in un certo numero di punti, oppure possiede un pencil di curve razionali di auto-intersezione 0. Dall'analisi emerge anche che la parte divisoriale R_0 del luogo di ramificazione dell'automorfismo σ su S ha al più una componente irriducibile.

Si studiano quindi i casi rigati, mostrando che, a meno di contrarre un certo numero di curve, si può costruire un'applicazione dalla superficie Y verso F_0, F_1 o F_2 e che, scoppiando un punto e contraendo di nuovo ci si può sempre ridurre a F_1 . Pertanto la superficie numericamente di Godeaux S è birazionalmente equivalente ad un piano triplo.

L'analisi della parte mobile $|\mathcal{A}'|$ del pencil $|N|$ su Y mostra che i casi rigati non si possono verificare.

Per mostrare la non esistenza dei casi del Pezzo, invece, è necessario studiare le immagini piane delle curve eccezionali ottenute scoppiando su S i punti fissi isolati dell'automorfismo σ . In questo caso, infatti, Y è lo scoppio del piano proiettivo in sette, otto o tredici punti. Tali curve devono essere poi suddivise in due gruppi a seconda dell'autovalore corrispondente (ω o ω^2 , con ω radice terza primitiva dell'unità). Tramite un'analisi dettagliata si verifica che tale suddivisione determina condizioni contraddittorie in alcuni dei punti scoppiati.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BAUER I., CATANESE F. and PIGNATELLI R., *Complex surfaces of general type: some recent progress*, Global aspects of complex geometry, Springer Verlag (2006), 1-58.
- [2] CALABRI A., CILIBERTO C., and MENDES LOPES M., *Numerical Godeaux surfaces with an involution*, Trans. Amer. Math. Soc., **359** (2007), 1605-1632.
- [3] GODEAUX L., *Sur une surface algébrique de genre zero et de bigenre deux*, Atti Accad. Naz. Lincei, **14** (1931), 479-481.
- [4] KEUM J., and LEE Y., *Fixed locus of an involution acting on a Godeaux surface*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **129** (2000), 205-216.
- [5] MIYAOKA Y., *Tricanonical maps of Godeaux surfaces*, Invent. Math., **34** (1976), 99-111.
- [6] PARDINI R., *Abelian covers of algebraic varieties*, J. Reine Angew. Math., **417** (1991), 191-213.
- [7] REID M., *Surfaces with $p_g = 0, K^2 = 1$* , J. Fac. Science Univ. of Tokio, Sec. IA, **25** (1978), 75-92.
- [8] STAGNARO E., *On Campedelli branch loci*, Ann. Univ. Ferrara, Sec. VII, **43** (1997), 1-26.

Via Tuscolana 1415A, 00173 Roma,
e-mail: palmieri@mat.uniroma3.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Roma Tre) - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Prof. Ciro Ciliberto, Università di Roma Tor Vergata