La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ENRICA NICOLINI

Procedure di decisione combinate per la soddisfacibilità di vincoli

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 315–318.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_315_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 315-318

Procedure di decisione combinate per la soddisfacibilità di vincoli

ENRICA NICOLINI

L'argomento principale trattato in questa tesi è lo studio di procedure di decisione per il problema di soddisfacibilità di vincoli e la loro combinazione. Più precisamente, data una teoria elementare T sulla segnatura Σ, il *problema di soddisfacibilità di vincoli* per T consite nel poter stabilire se la congiunzione di un insieme finito di letterali su Σ sia soddisfacibile in un modello di T.

L'interesse per questo tipo di argomenti è giustificato dal fatto che molte aree dell'informatica (fra cui la verifica del software, l'intelligenza artificiale, la rappresentazione della conoscenza e persino l'algebra computazionale) sono particolarmente interessate allo sviluppo di procedure di decisione e di schemi per la combinazione di quest'ultime.

Il primo risultato proposto nella tesi è la decidibilità del frammento universale della teoria degli array con dimensione. I metodi e le tecniche utilizzate per conseguire il risultato possono essere buoni esempi allo scopo di giustificare la necessità di riutilizzo e di integrazione di procedure già esistenti.

Combinare vicoli al prim'ordine.

Siano T_1 e T_2 due teorie elementari sulle segnature Σ_1 e Σ_2 rispettivamente. Sotto l'ipotesi che il problema di soddisfacibilità di vincoli per T_1 e per T_2 sia decidibile, si può analizzare la possibilità di risolvere il medesimo problema per $T_1 \cup T_2$.

Nella letteratura è noto che condizioni sufficienti per il trasferimento di decidibilità sono le ipotesi seguenti: (i) le segnature Σ_1 e Σ_2 sono disgiunte; (ii) le teorie T_1 e T_2 sono *stabilmente infinite*, ovvero si ha che ogni Σ_i formula priva di quantificatori che sia soddisfacibile in almeno un modello di T_i lo è anche in un modello infinito di T_i ($i = 1, 2$).

È naturale chiedersi se le assunzioni (i) e (ii) possano essere indebolite o addirittura omesse. Cominciamo con l'analisi dell'assunzione (ii); una prima risposta è data dal seguente teorema:

TEOREMA 1. – *Esistono teorie su segnature disgiunte il cui problema di soddisfacibilità di vincoli è decidibile, e la cui unione ha problema di soddisfacibilità di vincoli indecidibile.*

È possibile indebolire tuttavia la condizione (ii) introducendo un'opportuna nozione di Procedura per Sovrapposizione, ovvero di una variazione del Calcolo per Sovrapposizione con piccole modifiche introdotte allo scopo di aumentare i casi di terminazione. Vale così il seguente risultato:

TEOREMA 2. – *Siano T_1 e T_2 teorie su segnature disgiunte che ammettono una Procedura per Sovrapposizione; il problema di soddisfacibilità di vincoli per $T_1 \cup T_2$ è decidibile.*

D'altro canto, abbiamo indebolito l'assunzione (i) riguardo alla disgiunzione delle segnature estendendo un risultato di Ghilardi [4]. Sia T_0 una teoria universale sulla segnatura Σ_0 tale che $T_0 \subseteq T_1$ e $T_0 \subseteq T_2$. Per garantire la terminazione della nostra procedura di combinazione è sufficiente assumere che T_0 sia *noetheriana*, ovvero sia tale che, per ogni insieme finito di variabili $\underline{x}$, ogni catena ascendente infinita $\Theta_1 \subseteq \Theta_2 \subseteq \cdots \subseteq \Theta_n \subseteq \cdots$ di insiemi di Σ_0 atomi sulle variabili $\underline{x}$ sia definitivamente costante per conseguenza logica rispetto a T_0. La nozione di noetherianità è di chiara derivazione algebrica: di fatto, il problema della parola condizionale affrontato in branche dell'algebra computazionale per alcune classi di strutture si traduce in problema di soddisfacibilità di vincoli per teorie noetheriane. Per poter utilizzare propriamente la proprietà di noetherianità della teoria condivisa T_0 per un problema di soddifacibilità di vincoli su teorie combinate, occorre che esistano *T_i enumeratori di basi*, ovvero strumenti computazionali in grado di enumerare, modulo ridondanza, le Σ_0 clausole positive che sono conseguenze di T_i rispetto ad un Σ_i vincolo, con $i = 1, 2$. Per poter garantire la completezza della procedura, l'ipotesi di T_0 compatibilità risulta sufficiente. T_i è *T_0 compatibile* ogniqualvolta T_0 ammette model-completamento T_0^* ed ogni modello di T_i si immerge in un modello di $T_i \cup T_0^*$.

TEOREMA 3. – *Sotto le ipotesi che (i) T_0 sia una teoria noetheriana; (ii) esistano dei T_1 e T_2 enumeratori di basi, ρ_1 e ρ_2, per T_0; (iii) T_1 e T_2 siano T_0 compatibili; (iv) T_1 e T_2 abbiano problema di soddisfacibilità di vincoli decidibile, il problema di soddifacibilità di vincoli per $T_1 \cup T_2$ è decidibile.*

Combinazione in un contesto all'ordine superiore.

Per ottenere risultati di decidibilità in modo uniforme abbiamo riformulato il problema di soddisfacibilità di vincoli in un contesto all'ordine superiore, introducendo un'opportuna nozione di frammento. Un *frammento algebrico* è una coppia $\langle \mathcal{L}, T \rangle$, ove T è un insieme di termini ricorsivo (di un liguaggio tipato all'ordine superiore $\mathcal{L}$) che (i) è chiuso per sostituzione di termini in T con termini in T, e (ii) contiene tutte le variabili di un tipo τ che sia o un tipo di un qualche $t \in T$ o il tipo di una variabile che occorre libera in un qualche $t \in T$. Un frammento algebrico può essere dotato di una classe $\mathcal{S}$ di strutture chiuse per isomorfismo, costituendo così un *frammento algebrico interpretato* (o, talvolta, un *frammento* tout court)

$$\Phi = \langle \mathcal{L}, T, \mathcal{S} \rangle.$$

In questo contesto, il problema di soddisfacibilità di vincoli per Φ è riformulato nel problema di decidere se un Φ-vincolo (i.e. una congiunzione finita di equazioni e disequazioni fra Φ-termini) sia soddisfacibile in una qualche struttura $\mathcal{M} \in \mathcal{S}$.

Analizziamo ora il problema di trasferire la decidibilità del problema di soddisfacibilità di vincoli da due frammenti Φ_1, Φ_2 - che condividono un dato frammento Φ_0 - alla loro combinazione $\Phi_1 \oplus \Phi_2$ (i frammenti condivisi e combinati sono definiti nel modo atteso). La nostra definizione di frammento è sufficiente per poter formulare una procedura di decisione, ma rimangono comunque da affrontare terminazione e completezza: a tale scopo sono necessarie ulteriori ipotesi. Tali ipotesi sono formulate in modo tale che ciascun frammento fra Φ_1, Φ_2 debbono soddisfare *separatamente* rispetto a Φ_0.

In generale, diciamo che un frammento $\Phi = \langle \mathcal{L}, T, \mathcal{S} \rangle$ è un'*estensione* di $\Phi_0 = \langle \mathcal{L}_0, T_0, \mathcal{S}_0 \rangle$ se e solo se $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}$, $T_0 \subseteq T$ e tutte i $\mathcal{L}_0$-ridotti delle strutture di $\mathcal{S}$ appartengono a $\mathcal{S}_0$. Occorrerà considerare *espansioni semplici* di un frammento Φ_0: tali estensioni sono frammenti algebrici interpretati del tipo $\Phi_0(A) = \langle \mathcal{L}_0(A), T_0(A), \mathcal{S}_0(A) \rangle$ ottenuti da $\Phi_0 = \langle \mathcal{L}_0, T_0, \mathcal{S}_0 \rangle$ espandendo la segnatura $\mathcal{L}_0$ con un numero finito di costanti A di tipo appropriato (T_0 e $\mathcal{S}_0$ sono "espanse" a $T_0(A)$ e $\mathcal{S}_0(A)$ rispettivamente nel modo ovvio).

Per assicurare la terminazione, ricorriamo alla nozione di noetherianità riadattandola al nuovo contesto: Φ è una *espansione noetheriana di* Φ_0 se e solo se (i) Φ_0 è noetheriana; (ii) Φ è un'estensione di Φ_0; (iii) viene soddisfatta un'opportuna proprietà di compattezza debole e (iv) esiste un enumeratore di residui positivi, ovvero uno strumento computazionale in grado di enumerare (a meno di ridondanza) le Φ_0-clausole positive che sono Φ-conseguenze di un Φ-vincolo.

La richiesta di T_0-compatibilità è ricatturata nel modo seguente. Diciamo che $\Phi_0^\star = \langle \mathcal{L}_0, T_0, \mathcal{S}_0^\star \rangle$ è una *specializzazione* di $\Phi_0 = \langle \mathcal{L}_0, T_0, \mathcal{S}_0 \rangle$ se e solo se $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}_0^\star$ e, per ogni insieme finito A di costanti di tipo appropriato, per ogni struttura $\mathcal{M} \in \mathcal{S}_0(A)$, esiste $\mathcal{M}' \in \mathcal{S}_0^\star(A)$ tale che $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ soddisfino i medesimi $\Phi_0(A)$-atomi chiusi. Inoltre, un frammento $\Phi = \langle \mathcal{L}, T, \mathcal{S} \rangle$ che estende Φ_0 è *compatibile* rispetto ad una data specializzazione $\Phi_0^\star$ di Φ_0 se e solo se $\Phi^\star = \langle \mathcal{L}, T, \mathcal{S}^\star \rangle$ è una specializzazione di Φ, ove $\mathcal{S}^\star$ contiene esattamente quelle $\mathcal{L}$-strutture di $\mathcal{S}$ il cui $\mathcal{L}_0$-ridotto appartiene a $\mathcal{S}_0^\star$.

Da ultimo, per garantire la completezza della procedura di combinazione vengono utilizzati potenti strumenti di natura model-teoretica guidati semanticamente, le cosiddette *operazioni strutturali*: un'operazione strutturale sul frammento $\Phi = \langle \mathcal{L}, T, \mathcal{S} \rangle$ è una famiglia di corrispondenze, (al variare di A) $O_A : \mathcal{S}(A) \to \mathcal{S}(A)$ tali che $\mathcal{M}$ e $O_A(\mathcal{M})$ soddisfino i medesimi $\Phi(A)$-atomi chiusi. Per poter servire al nostro scopo, si richiede che tali operazioni ammettano un teorema di isomorfismo; esempio di operazioni siffatte per frammenti al prim'ordine sono le ultrapotenze: il *teorema di Keisler-Shelah* mostra come due $\mathcal{L}(A)$-strutture $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ siano elementarmente equivalenti se e solo se esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tale che le ultrapotenze $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}$ e $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{N}$ siano $\mathcal{L}(A)$-isomorfe. Più formalmente, una collezione $\mathcal{O}$ di operazioni strutturali per $\Phi = \langle \mathcal{L}, T, \mathcal{S} \rangle$ ammette un *teorema di Φ-isomorfismo* se e solo se per ogni insieme finito di costanti libere A e per ogni $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ che soddisfano i medesimi $\Phi(A)$-atomi chiusi, esistono due operazioni $O, O' \in \mathcal{O}$ tali che le strutture $O_A(\mathcal{M})$ e $O'_A(\mathcal{N})$ sono $\mathcal{L}(A)$-isomorfe. Se Φ' è un'estensione del frammento Φ, l'operazione strutturale O è *Φ'-estensibile* se e solo se accade quanto segue: dopo aver applicato O al $\mathcal{L}(A)$-ridotto di una certa $\Phi'(A')$-struttura $\mathcal{M}$, si è sempre garantiti di ottenere una struttura che sia $\mathcal{L}(A)$-isomorfa al $\mathcal{L}(A)$-ridotto di una $\Phi'(A')$-struttura $\mathcal{N}$ che soddisfa i medesimi $\Phi'(A')$-atomi chiusi di $\mathcal{M}$ ($A \subseteq A'$ indica l'insieme di quelle costanti in A' il cui tipo è il tipo di una Φ-variabile). Possiamo così enunciare ora un risultato generale di decidibilità:

TEOREMA 4. – *Il problema di soddisfacibilità di vincoli per il frammento combinato $\Phi_1 \oplus \Phi_2$ è decidibile sotto le ipotesi che: (i) Φ_1, Φ_2 abbiano problema di soddisfacibilità di vincoli decidibile; (ii) Φ_1, Φ_2 sono entrambe estensioni noetheriane del frammento condiviso Φ_0; (iii) Φ_1, Φ_2 sono Φ_0-compatibili rispetto ad una specializzazione $\Phi_0^\star$ di Φ_0; (iv) c'è una collezione $\mathcal{O}$ di operazioni strutturali $\Phi_1^\star$- e $\Phi_2^\star$-estendibili che ammettono un teorema di $\Phi_0^\star$-isomorfismo.*

Questo risultato generale di decidibilità copre, oltre a nuove applicazioni, il trasferimento di decidibilità della conseguenza logica globale per la fusione di logiche modali, il trasferimento di decidibilità per la fusione di A-Box rispetto a T-Box nei "local abstract description systems"; inoltre è un ingrediente fondamentale per provare il seguente risultato:

TEOREMA 5. – *Se un frammento modale ad una variabile Φ_{1M} e un frammento monadically suitable Φ_e hanno problema di soddisfacibilità di vincoli decidibile, allora la loro fusione monodica $\Phi_e^W \oplus \Phi_{1M}$ ha anch'essa problema di soddisfacibilità di vincoli decidibile.*

Come caso particolare, il Teorema 5 permette di ridurre la decidibilità del frammento modale e temporale monodico alle loro componenti estensionali (i.e. non modali), riscoprendo e fornendo un'estensione propria di recenti risultati nella letteratura.

BIBLIOGRAFIA

[1] GHILARDI S., NICOLINI E. and ZUCCHELLI D., *A Comprehensive Combination Framework*, ACM Transactions on Computational Logic (2006), (to appear).

[2] GHILARDI S., NICOLINI E., RANISE S. and ZUCCHELLI D., *Decision Procedures for Extensions of the Theory of Arrays*, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, **50** (2007), 231-254.

[3] BONACINA M.P., GHILARDI S., NICOLINI E., RANISE S. and ZUCCHELLI D., *Decidability and Undecidability Results for Nelson-Oppen and Rewrite-based Decision Procedures*, Proc. of the 3rd International Joint Conference on Automated Reasoning, Springer LNCS, **4130** (2006), 513-537.

[4] GHILARDI S., *Model Theoretic Methods in Combined Constraint Satisfiability*, Journal of Automated Reasoning, **33** (2004), 221-249.

Dipartimento di Scienze dell'Informazione, Università degli Studi di Milano
Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amministrativa: Università di Milano) - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Professor Silvio Ghilardi (Università degli Studi di Milano)