La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Graziana Musceo

Semigruppi di operatori positivi su spazi di funzioni continue con peso

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 311–314.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_311_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 311-314

Semigruppi di operatori positivi su spazi di funzioni continue con peso

GRAZIANA MUSCEO

1. – Introduzione.

Oggetto della tesi è lo studio dei semigruppi di operatori positivi su spazi di funzioni continue con peso.

L'importanza dei semigruppi positivi sia da un punto di vista teorico che applicativo è ben nota. La positività dà luogo ad una serie di proprietà spettrali notevoli aggiuntive che riguardano ad esempio simmetrie dello spettro del generatore e comportamento asintotico del semigruppo.

Non solo, i semigruppi positivi su spazi di funzioni continue e limitate sono fortemente relazionati alla teoria dei processi di Markov che costituisce un capitolo molto importante nella moderna teoria della probabilità.

In [1] gli autori hanno avviato lo studio dei semigruppi positivi su particolari spazi di funzioni continue non limitate, ossia spazi di funzioni continue con peso.

Obiettivo della tesi è stato quello di approfondire ulteriormente questo tipo di indagine considerando altre classi di spazi di funzioni continue con peso e stabilendo nel loro ambito sia dei criteri di generazione di semigruppi positivi e sia delle caratterizzazioni dei semigruppi associati a processi di Markov.

I risultati ottenuti trovano applicazione nello studio delle proprietà di generazione per operatori differenziali ellittici del second'ordine su intervalli della retta reale.

La classe degli operatori differenziali considerati include, in particolare, l'operatore differenziale associato all'equazione di diffusione di Black-Scholes che riveste una notevole importanza in Finanza Matematica. Come sottoprodotto dei risultati conseguiti, per tale equazione si individuano nuove condizioni che garantiscono esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati iniziali delle soluzioni.

I principali risultati presentati nella tesi sono raccolti nei lavori [2, 3]

2. – Generazione di semigruppi di operatori positivi nella spazio $E^w(X)$.

Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto e a base numerabile e sia $\widetilde{X}$ uno spazio metrico compatto tale che X sia un sottospazio aperto denso di $\widetilde{X}$.

Denotato con $C(\widetilde{X})$ lo spazio delle funzioni continue a valori reali su $\widetilde{X}$, si definisce lo spazio $E(X)$ nel modo seguente:

$$E(X) := \{f \in C(X) : \text{ esiste una (unica) estensione } \widetilde{f} \in C(\widetilde{X}) \text{ tale che } \widetilde{f}|_X = f\};$$

gli spazi $E(X)$ e $C(\widetilde{X})$ possono essere identificati in maniera naturale mediante l'isomorfismo isometrico $f \in E(X) \longmapsto \widetilde{f} \in C(\widetilde{X})$.

Sia w una funzione peso su X, i.e. $w \in C_b(X)$ tale che $w(x) > 0$ per ogni $x \in X$, ove $C_b(X)$ è lo spazio delle funzioni continue e limitate a valori reali definite su X; si definisce lo spazio $E^w(X)$ nel seguente modo:

$$E^w(X) := \{f \in C(X) : fw \in E(X)\};$$

tale spazio, munito della norma $\|\cdot\|_w$, definita da

$$\|f\|_w := \|wf\|_\infty \quad \text{per ogni } f \in E^w(X),$$

è un reticolo di Banach.

Identificando gli spazi $E(X)$ e $C(\widetilde{X})$ mediante l'isomorfismo isometrico

$$\Phi : E^w(X) \longrightarrow C(\widetilde{X}) \quad \text{tale che} \quad \Phi(f) = \widetilde{wf}$$

per ogni $f \in E^w(X)$, si è stabilito il seguente risultato di generazione di semigruppi positivi sullo spazio di funzioni continue con peso $E^w(X)$.

TEOREMA 2.1. – *Siano $A : D(A) \subset E^w(X) \longrightarrow E^w(X)$ un operatore lineare densamente definito ed $\omega \in R$.*

Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1) *$(A, D(A))$ è il generatore di un semigruppo positivo fortemente continuo $(T(t))_{t \geq 0}$ su $E^w(X)$ tale che $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ per ogni $t \geq 0$.*
2) *a) Esiste $\lambda > \omega$ tale che $(\lambda I - A)(D(A)) = E^w(X)$.*
   b) Se $f \in D(A)$ e $\sup_{x \in \tilde{X}} \Phi(f)(x) > 0$, allora per ogni $x_0 \in \widetilde{X}$ tale che

   $\Phi(f)(x_0) = \sup_{x \in \tilde{X}} \Phi(f)(x)$ si ha che

   (i) $Af(x_0) \leq \omega f(x_0)$ se $x_0 \in X$,

   oppure

   (ii) $\Phi(Af)(x_0) \leq \omega \Phi(f)(x_0)$ se $x_0 \in \widetilde{X} \setminus X$.

Successivamente sono state studiate le relazioni che intercorrono tra le funzioni di transizione e semigruppi di Feller, caratterizzando quegli operatori che sono generatori di semigruppi positivi su $E^w(X)$ che a loro volta sono semigruppi di transizione associati ad opportune funzioni di transizione e quindi ad opportuni processi di Markov.

3. – Generazione di semigruppi di Feller per operatori differenziali del second'ordine uno-dimensionali.

I risultati presentati nella sezione precedente trovano applicazione nello studio delle proprietà di generazione per operatori differenziali ellittici del second'ordine su intervalli della retta reale.

Sia J un intervallo di R e siano $r_1 := \inf J \in R \cup \{-\infty\}$ e $r_2 := \sup J \in R \cup \{+\infty\}$; si indicherà con il simbolo $\widetilde{J}$ la compattificazione $[r_1, r_2]$ della parte interna $\mathring{J}$ di J.

Si pone

$$E(J) := \left\{ f \in C(J) : \text{esiste } \lim_{x \to r_i^{\pm}} f(x) \in R \quad \text{per ogni } i = 1,2 \quad \text{tale che } r_i \notin J \right\},$$

e considerata una funzione peso w su J, i.e. $w \in C_b(J)$ e $w(x) > 0$ per ogni $x \in J$, si pone

$$E^w(J) := \{ f \in C(J) : \; wf \in E(J) \}.$$

Siano $\alpha, \beta \in C(\mathring{J})$ tale che $\alpha(x) > 0$ per ogni $x \in \mathring{J}$ e sia

$$D_M(A) := \big\{ u \in E^w(J) : u\big|_{\mathring{J}} \in C^2(\mathring{J}) \text{ e}$$

$$\lim_{x \to r_i^{\pm}} w(x)(\alpha(x)u''(x) + \beta(x)u'(x)) \in R \text{ per ogni } i = 1,2 \big\}.$$

Per ogni $u \in D_M(A)$ ed $x \in J$ si ponga

$$Au(x) := \begin{cases} \alpha(x)u''(x) + \beta(x)u'(x) & \text{se } x \in \mathring{J}, \\ \lim\limits_{x \to r_i^{\pm}} \alpha(x)u''(x) + \beta(x)u'(x) & \text{se } x = r_i, \; i = 1,2. \end{cases}$$

Per l'operatore $(A, D_M(A))$ si dimostra che, se gli estremi r_i $(i = 1,2)$ sono di entrata, i.e.

$$\left| \int_{x_0}^{r_i} \frac{1}{\alpha(x)W(x)w(x)^2} \int_{x_0}^{x} W(t)w(t)^2 \, dt \, dx \right| < +\infty,$$

e

$$\left| \int_{x_0}^{r_i} W(x)w(x)^2 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\alpha(t)W(t)w(t)^2} \, dt \, dx \right| = +\infty.$$

oppure se sono naturali, i.e.

$$\left| \int_{x_0}^{r_i} W(x)w(x)^2 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\alpha(t)W(t)w(t)^2} \, dt \, dx \right| = +\infty,$$

e

$$\left| \int_{x_0}^{r_i} \frac{1}{\alpha(x)W(x)w(x)^2} \int_{x_0}^{x} W(t)w(t)^2 \, dt \, dx \right| = +\infty,$$

ove $W(x) := exp\left(- \int_{x_0}^{x} \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \, dt \right)$, $x \in J$ e x_0 punto fissato in $\mathring{J}$, allora esso genera un semigruppo positivo e fortemente continuo su $E^w(J)$.

Inoltre si dimostra che, sotto opportune ipotesi, il semigruppo generato è un semigruppo di Feller associato ad un processo di Markov.

Lo stesso risultato di generazione si ottiene per l'operatore A con dominio di tipo Wentzel

$$D_V(A) := \Big\{ u \in E^w(J) : u\big|_{\mathring{J}} \in C^2(\mathring{J}), \text{ e} \\ \lim_{x \to r_i^{\pm}} w(x)(\alpha(x)u''(x) + \beta(x)u'(x)) = 0 \text{ per } i = 1,2 \Big\}.$$

tale che

$$Au(x) := \begin{cases} \alpha(x)u''(x) + \beta(x)u'(x) & \text{se } x \in \mathring{J}, \\ 0 & \text{se } x = r_i,\ i = 1,2, \end{cases}$$

per ogni $u \in D_V(A)$ e per ogni $x \in J$.

Se gli estremi r_i $(i = 1,2)$ non sono di entrata, l'operatore $(A, D_V(A))$ è generatore di un semigruppo fortemente continuo e positivo su $E^w(J)$ che risulta essere un semigruppo di Feller associato ad un processo di Markov.

La classe degli operatori differenziali ai quali si possono applicare i risultati ottenuti, include, in particolare, l'operatore differenziale

$$Lc(x) := \frac{\sigma^2}{2} x^2 c''(x) + rxc'(x) - rc(x) \quad (x > 0)$$

$(\sigma > 0,\ r > 0)$ e la corrispondente equazione di diffusione

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = L(c(\cdot,t))(x) \qquad (x > 0,\ t \geq 0)$$

è l'equazione di Black-Scholes.

Per il problema di Cauchy associato a tale equazione, con condizioni laterali sia di tipo massimale che di tipo Wentzel, si ottengono nuovi risultati riguardanti esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati iniziali delle soluzioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Altomare and A. Attalienti, *Degenerate evolution equations in weighted continuous function spaces, Markov processes and the Black-Scholes equation-Part I*, Result. Math., **42** (2002), 193-211.

[2] F. Altomare and G. Musceo, *Markov processes and positive semigroups on some classes of weighted continuous function spaces*, in corso di stampa su Rend. Circ. Mat. Palermo 2008.

[3] F. Altomare and G. Musceo, *Positive semigroups generated by degenerated second-order differential operators*, in corso di stampa su Funkcialaj Ekvacioj, 2008.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari
e-mail: musceo@dm.uniba.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Bari) - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Prof. Francesco Altomare