La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUCA MOTTO ROS

Riducibilità generali per insiemi di reali

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 307–310.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_307_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 307-310

Riducibilità generali per insiemi di reali

LUCA MOTTO ROS

Intuitivamente, un insieme di reali A è *più semplice* di un insieme di reali B se il problema di verificare l'appartenenza di un reale x ad A è riconducibile a quello di determinare l'appartenenza di x (o di un altro reale ad esso collegato) a B. In particolare, diciamo che A è *riducibile (con continuità)* a B se esiste una funzione continua f tale che $x \in A \iff f(x) \in B$ per ogni reale x, in simboli $A \leq_{\mathsf{W}} B$. (Il simbolo W si deve a Wadge che iniziò lo studio sistematico di questa relazione in [4].) Dunque in questo caso le funzioni continue sono usate come *riduzioni* tra insiemi di reali. Le classi di equivalenza della relazione di equivalenza indotta da $\leq_{\mathsf{W}}$ sullo spazio di Baire ([1]) ${}^{\omega}\omega$ vengono dette *gradi di Wadge*, e il preordine $\leq_{\mathsf{W}}$ induce un su di essi un ordine parziale $\leq$. Usando tecniche derivanti dalla teoria dei giochi infiniti, Wadge dimostrò un semplice (ma fondamentale) lemma che ha giocato un ruolo importantissimo in Teoria Descrittiva degli Insiemi: AD, l'*Assioma di Determinatezza*, implica che se $A, B \subseteq {}^{\omega}\omega$ allora

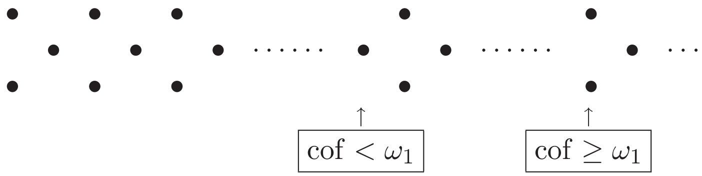
$$(\star) \qquad A \leq_{\mathsf{W}} B \quad \text{oppure} \quad {}^{\omega}\omega \setminus B \leq_{\mathsf{W}} A.$$

Il Lemma di Wadge implica che $\leq_{\mathsf{W}}$ è un ordine semi-lineare, e quindi $(\star)$ è di solito denotata con $\mathsf{SLO}^{\mathsf{W}}$. Partendo da questo risultato (e grazie al successivo contributo di vari altri logici e matematici) venne data una descrizione completa della struttura dei gradi di Wadge assumendo $\mathsf{AD} + \mathsf{DC}(\mathbb{R})$, dove $\mathsf{DC}(\mathbb{R})$ è un frammento dell'Assioma di Scelta noto come Assioma delle Scelte Dipendenti sui Reali. Quest'analisi, nota oggi come Teoria di Wadge, ha portato a diverse applicazioni sia in Teoria degli Insiemi, sia in Informatica Teorica (in particolare nel campo degli automi deterministici).

In [1] e [3] Andretta e Martin considerarono riduzioni Boreliane e Δ^0_2-riduzioni invece di riduzioni continue: utilizzando argomenti di tipo topologico (insieme a tecniche combinatoriche nel primo caso), essi dimostrarono che le strutture di gradi indotte da queste riducibilità mostravano esattamente lo stesso schema della gerarchia di Wadge, ovvero (ogni pallino rappresenta un grado, e un grado ne precede

([1]) Come spesso avviene in Teoria Descrittiva degli Insiemi, i reali vengono qui identificati con lo spazio di Baire (che è omeomorfo agli irrazionali).

un altro se e solo se si trova più a sinistra di esso; il simbolo ω_1 denota il primo ordinale non numerabile):

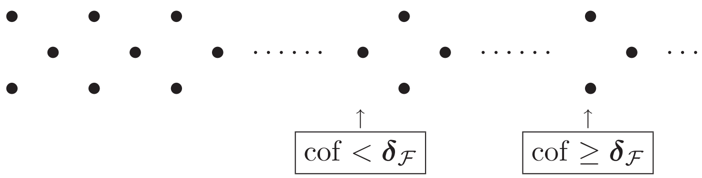


Da questi risultati sorge naturalmente il problema di determinare, dato un qualunque "ragionevole" insieme di funzioni $\mathcal{F}$, la struttura di gradi che viene indotta se usiamo le funzioni di $\mathcal{F}$ come riduzioni tra insiemi, ovvero se consideriamo il preordine $A \leq_{\mathcal{F}} B \iff A = f^{-1}(B)$ per qualche $f \in \mathcal{F}$. (Il termine "ragionevole" è un po' vago, ma dovrebbe essere tale che tutti gli insiemi di funzioni "naturali", come le funzioni continue, le funzioni Boreliane e così via, siano ragionevoli: una prima definizione rigorosa di "ragionevolezza" si trova già in [3].)

In questo lavoro tale problema viene risolto in maniera (quasi) completa (assumendo sempre $\mathsf{AD} + \mathsf{DC}(\mathbb{R})$):

Teorema 1. – *Sia $\mathcal{F}$ un insieme ragionevole di funzioni:*

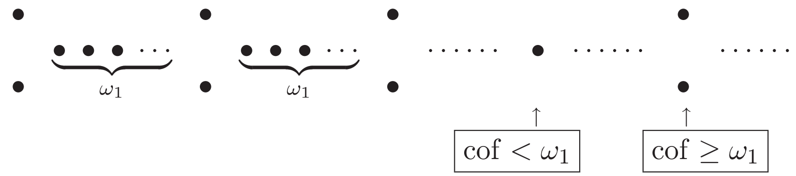
1. *se $\mathcal{F}$ è un sottoinsieme delle funzioni Boreliane allora la struttura di gradi indotta da esso segue lo stesso schema della gerarchia di Wadge;*
2. *se $\mathcal{F}$ contiene in maniera propria le funzioni Boreliane si ottiene uno schema che differisce da quello di Wadge unicamente per il fatto che nei casi limite (cioè nel caso dei gradi che non sono successori) l'ordinale ω_1 deve essere sostituito da un opportuno ordinale caratteristico $\delta_{\mathcal{F}}$:*



Il Teorema 1 non si ottiene come generalizzazione diretta dei risultati ottenuti da Wadge, Andretta e Martin: infatti non si assume nessuna conoscenza su $\mathcal{F}$ (a parte la sua "ragionevolezza"), e dunque non se ne possono sfrutture eventuali caratteristiche particolari (che sono state invece determinanti nei casi precedenti). L'idea centrale che è stata introdotta per ottenere questa analisi più generale è la nozione di *insieme caratteristico* $\Delta_{\mathcal{F}}$ della collezione $\mathcal{F}$ (intuitivamente $\Delta_{\mathcal{F}}$ è composto dai sottoinsiemi di ${}^{\omega}\omega$ che sono semplici dal "punto di vista" di $\mathcal{F}$). Questo strumento è in un certo senso cruciale per lo studio della gerarchia indotta da $\mathcal{F}$: infatti, se si conosce l'insieme caratteristico di $\mathcal{F}$ (anche in assenza di una precisa definizione o di qualunque altra informazione riguardante $\mathcal{F}$ stesso) si può descrivere completamente la struttura di gradi indotta da esso. In particolare, se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono due insiemi di riduzioni *distinti* allora le corrispondenti strutture di gradi coincidono se e solo se $\Delta_{\mathcal{F}} = \Delta_{\mathcal{G}}$.

Ovviamente, come casi particolari di questa analisi generale, si possono ottenere nuovamente i vari risultati di Wadge, Andretta e Martin, ma si possono considerare anche numerosi altri esempi e studiare le relazioni che intercorrono tra di loro (sia rispetto alla relazione di inclusione tra insiemi di funzioni, sia rispetto alle strutture di gradi indotte da essi) ([2]): ad esempio, si è dimostrato che la collezione degli insiemi ragionevoli di funzioni che sono sottoinsiemi delle funzioni Boreliane formano un reticolo completo (con massimo e minimo) rispetto alla relazione di inclusione, ma sono stratificati linearmente in $\omega_1 + 1$ livelli in relazione alla finezza delle corrispondenti gerarchie di gradi.

Bisogna tuttavia osservare che vi sono alcuni insiemi di funzioni $\mathcal{F}$ (come ad esempio le funzioni di Baire classe limitata) che sfuggono alle definizioni di "ragionevolezza" utilizzate nel Teorema 1. Tali casi sono stati studiati separatamente, e si è potuto dimostrare (basandosi in maniera essenziale sui risultati ottenuti nei casi precedenti e, in particolare, sull'analisi delle *catene di riduzioni*) che per ciascuno di essi la gerarchia di gradi indotta segue lo schema della così detta *gerarchia di Lipschitz* (già determinata da Wadge nella sua tesi di dottorato):



Infine, l'analisi di questi insiemi di funzioni e delle corrispondenti gerarchie di gradi ha permesso di ottenere numerosi altri risultati, sia di natura combinatoriale che di natura puramente topologica (che potrebbero dunque trovare applicazione anche in altri campi della matematica, come l'Analisi Funzionale e lo studio degli spazi di Banach):

- definizione e analisi di giochi infiniti corrispondenti agli insiemi delle Δ^0_ξ-funzioni (ovvero delle funzioni f tali che $f^{-1}(D) \in \Delta^0_\xi$ per ogni $D \in \Delta^0_\xi$);
- costruzione di operatori "successore" per le varie gerarchie di gradi introdotte;
- analisi di una stratificazione naturale delle Δ^0_2-funzioni (analoga al lavoro svolto da Kechris e Louveau nel contesto delle funzioni di Baire classe 1);
- nuove caratterizzazioni di vari spazi funzionali, in particolare:

([2]) Analizzando tali insiemi di funzioni, si è anche data una risposta negativa ad un problema posto da Andretta in [2] dimostrando, in particolare, che non esiste nessun tipo di generalizzazione "globale" del Teorema di Jayne-Rogers (che era stato utilizzato in [1]).

1. se X e Y sono spazi metrici con Y separabile, una funzione $f\colon X \to Y$ è di Baire classe ξ se e solo se è limite *uniforme* di una successione di $\boldsymbol{\Delta}^0_{\xi+1}$-funzioni;
2. se X e Y sono come sopra e X è separabile e ultrametrico, allora $f\colon X \to Y$ è di Baire classe 1 se e solo se è limite puntuale di funzioni *full* (ovvero di funzioni Lipschitziane particolarmente semplici);
3. se X e Y sono spazi Polacchi zero-dimensionali, allora $f\colon X \to Y$ è una $\boldsymbol{\Delta}^0_2$-funzione se e solo se esiste $\alpha < \omega_1$ tale che per ogni aperto U si ha $f^{-1}(U) \in \alpha - \boldsymbol{\Sigma}^0_1$ (dove le collezioni $\alpha - \boldsymbol{\Sigma}^0_1$ costituiscono la gerarchia delle differenze di aperti introdotta da Kuratowski, che fornisce una stratificazione non triviale in ω_1 livelli di $\boldsymbol{\Delta}^0_2$).

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDRETTA A., *More on Wadge determinacy*, Annals of Pure and Applied Logic, **144** (2006), 2-32.
[2] ANDRETTA A., *The* SLO *principle and the Wadge hierarchy*, to appear.
[3] ANDRETTA A. and MARTIN D. A., *Borel-Wadge degrees*, Fundamenta Mathematicae, **177** (2006), 175-192.
[4] WADGE W. W., *Reducibility and Determinateness on the Baire Space*, PhD thesis, University of California, Berkeley (1983).

Kurt Gödel Research Center for Mathematical Logic, University of Vienna
e-mail: luca.mottoros@libero.it
Dottorato in Matematica per le Scienze dell'Ingegneria
(sede amministrativa: Politecnico di Torino) - Ciclo XIX
Relatori: Prof. Alessandro Andretta - Università di Torino;
Prof. Riccardo Camerlo - Politecnico di Torino