DARIO DANIELE MONTICELLI

Principi di massimo ed applicazioni per una classe di operatori lineari ellittici degeneri

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 303–306.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_303_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 303-306

Principi di massimo ed applicazioni per una classe di operatori lineari ellittici degeneri

DARIO DANIELE MONTICELLI

I principi di massimo sono uno strumento ben noto che si dimostra molto utile nello studio di equazioni differenziali alle derivate parziali, particolarmente di tipo ellittico. Infatti la validità di opportuni principi di massimo gioca un ruolo chiave, per esempio, nel provare teoremi di unicità e risultati di simmetria per soluzioni classiche di problemi al bordo, nel trovare stime a priori per soluzioni di disequazioni differenziali, e nel mostrare risultati di nonesistenza per soluzioni classiche positive e non banali per problemi definiti sull'intero spazio.

L'obiettivo di questo lavoro è di estendere alcuni di questi importanti risultati dal caso uniformemente ellittico ad una più ampia classe di operatori differenziali lineari del secondo ordine, definiti su un dominio limitato $\Omega \subset \boldsymbol{R}^N$.

Considereremo infatti operatori, che chiameremo ellittici degeneri, che possono non essere ellittici su tutto Ω, ma che posssono degenerare e divenire parabolici su opportuni sottoinsiemi del dominio aventi interno vuoto.

L'idea che abbiamo seguito è stata di utilizzare tecniche classiche, di solito impiegate per trattare operatori uniformemente ellittici, per studiare anche i casi ellittici degeneri. Si pone quindi il problema di come superare gli ostacoli creati dalla presenza dell'insieme di degenerazione. Seguendo l'idea di Agmon–Nirenberg–Protter [1], ciò viene realizzato richiedendo che l'operatore L soddisfi una condizione di ellitticità uniforme nel dominio Ω solo in una direzione fissata e che l'insieme di degenerazione soddisfi opportune proprietà geometriche, piuttosto che imponendo condizioni di elevata regolarità sui coefficienti per poter trattare L come un operatore di Hörmander, come studiato da Bony (1969).

In particolare, consideriamo un operatore differenziale lineare del secondo ordine

$$Lu = a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_iu + c(x)u \qquad \text{in } \Omega \tag{1}$$

che abbia forma caratteristica non negativa, cioè che soddisfi

$$a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \geq 0 \quad \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \zeta \in \boldsymbol{R}^N, \tag{2}$$

come già studiato da Oleĭnik–Radkevič (1973), e con $b_i,\, c \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ e $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni $i, j = 1, ..., N$. Assumeremo inoltre che per un'opportuna direzione fissata $\xi \in \boldsymbol{R}^N$ si abbia

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \delta > 0 \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{3}$$

La prima parte della tesi è dedicata all'estensione dal caso uniformemente ellittico a quello ellittico degenere di forme classiche di principi di massimo, quali i Principi di Massimo Debole e Forte, ed inoltre proviamo anche un lemma di tipo

Hopf per punti del bordo del dominio che non siano caratteristici per la parte principale dell'operatore. Per provare il Principio di Massimo Forte, inoltre, assumiamo che l'insieme di degenerazione dell'operatore L, definito da

$$\Sigma = \{x \in \overline{\Omega} \mid \det[a_{ij}(x)] = 0\}, \tag{4}$$

soddisfi la seguente condizione tecnica sulla sua geometria

- Σ ha interno vuoto e $\Omega \setminus \Sigma$ ha al più una infinità numerabile di componenti connesse $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m, \dots$
- $\Sigma \cap \Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, dove $\forall\, x_0 \in \Sigma_1$ e $\forall\, \Omega_m$ tale che $x_0 \in \partial\Omega_m$ esiste $\overline{B_r(x_1)} \subset \overline{\Omega}_m$ tale che

$$x_0 \in \partial B_r(x_1),\ \langle (x_0 - x_1), A(x_0)(x_0 - x_1)\rangle_{\boldsymbol{R}^N} > 0,\ \overline{B_r(x_1)} \cap \Sigma = \{x_0\}, \tag{5}$$

mentre $\forall\, x_0 \in \Sigma_2$ esiste $\overline{B_r(x_1)} \subset \Omega$ tale che

$$x_0 \in \partial B_r(x_1),\ \langle (x_0 - x_1), A(x_0)(x_0 - x_1)\rangle_{\boldsymbol{R}^N} > 0,\ \overline{B_r(x_1)} \cap \Sigma_2 = \{x_0\}. \tag{6}$$

- per ogni $i \in \boldsymbol{N}$ esiste una mappa biunivoca $\sigma : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ tale che $\sigma(1) = i$ e tale che $\forall\, h \in \boldsymbol{N}$, $h \geq 2$ esiste $l \in \boldsymbol{N}$ con $1 \leq l \leq h-1$ e $\Sigma_1 \cap \partial\Omega_{\sigma(h)} \cap \partial\Omega_{\sigma(l)} \neq \emptyset$,

dove abbiamo indicato con $A(x) = [a_{ij}(x)]$ la matrice dei coefficienti della parte principale dell'operatore.

Da questi primi risultati deriviamo come conseguenze una stima a priori per soluzioni classiche di problemi di Dirichlet per equazioni differenziali lineari del secondo ordine ellittiche degeneri su domini limitati, che a sua volta garantisce un risultato di unicità per tali soluzioni. Studiamo inoltre alcuni principi di massimo generalizzati, che indeboliscono le ipotesi di segno sul coefficiente di ordine zero dell'operatore L, che sono estensioni di analoghi risultati già noti per operatori uniformemente ellittici.

Nella seconda parte della tesi abbiamo considerato una nozione di soluzione debole, opportunamente definita, per problemi che coinvolgono operatori ellittici degeneri del secondo ordine. Rinunciando alla precedente condizione tecnica sulla geometria dell'insieme di degenerazione Σ, ma assumendo al contempo che per ogni $i, j = 1, \dots, N$ le derivate deboli $D_j a_{ij}(x)$ esistano e siano essenzialmente limitate su Ω, proviamo una disuguaglianza di tipo Poincaré per una classe di spazi di Sobolev con pesi opportuni, che ci permette di introdurre l'ambiente funzionale dove studiare l'operatore.

Gli spazi usati sono definiti per completamento dello spazio delle funzioni test regolari, rispetto ad una opportuna norma che coinvolge la norma in $L^2(\Omega)$ sia della funzione che del suo gradiente (pesato in modo opportuno). Nel caso di operatori uniformemente ellittici, questa costruzione porta agli spazi di Sobolev standard $H_0^1(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$.

Dopo aver studiato alcune delle proprietà di tali spazi, proviamo un risultato di esistenza ed unicità per soluzioni deboli del problema di Dirichlet in Ω (sia con condizioni al bordo omogenee che con condizioni al bordo non omogenee) ed un Principio di Massimo Debole per soluzioni deboli di disuguaglianze differenziali, che coinvolgono operatori lineari del secondo ordine ellittici degeneri.

Uno dei principali problemi incontrati nello studio di questi risultati è stato la mancanza di un risultato analogo a quello di Meyers–Serrin (1964) per gli spazi di Sobolev classici.

Tali spazi pesati sono stati introdotti da Chanillo–Wheeden (1986) per provare una disuguaglianza di Harnack per soluzioni deboli dell'equazione $D_i(a_{ij}(x)D_ju) = 0$ in Ω, dove la parte principale dell'operatore ha coefficienti misurabili e soddisfa una opportuna condizione di ellitticità degenere. Sono inoltre stati impiegati anche in importanti lavori di altri autori, come ad esempio da Franchi–Gutiérrez–Wheeden (1994), che indeboliscono ulteriormente la condizione di ellitticità degenere richiesta da Chanillo–Wheeden.

Il nostro interesse per queste tematiche, riguardanti operatori linari del secondo ordine ellittici degeneri, nasce dall'interesse per l'operatore di Grushin, definito da

$$G_\gamma u(z) = |y|^{2\gamma}\Delta_x u(z) + \Delta_y u(z) \quad \text{per } z := (x,y) \in \boldsymbol{R}^{d+k}, \text{ con } \gamma > 0. \tag{7}$$

Nella terza parte della tesi applichiamo i risultati delle due sezioni precedenti al caso di un operatore L avente l'operatore di Grushin G_γ come parte principale, ed inoltre mostriamo un lemma di tipo Hopf che, nel caso in questione, copre alcune delle situazioni in cui il bordo del dominio Ω è caratteristico per l'operatore.

Nell'ultima parte della tesi, infine, utilizzando i risultati precedenti studiamo due problemi semilineari per l'operatore di Grushin. In entrambi i casi viene sfruttata pesantemente la tecnica dei "moving planes", che permette di sfruttare opportuni principi di massimo, simmetrie ed invarianze dell'operatore per ottenere simmetrie per le soluzioni dei problemi considerati.

L'operatore di Grushin, contrariamente all'operatore di Laplace, non è invariante per traslazioni e riflessioni rispetto ad iperpiani in tutte le direzioni dello spazio ambiente $\boldsymbol{R}^{d+k}$, quindi in questo caso si deve prestare particolare attenzione nell'implementazione di tale tecnica. Si può però notare che G_γ è invariante rispetto a dette trasformazioni almeno in alcune direzioni di $\boldsymbol{R}^{d+k}$, cioè in quelle di $\boldsymbol{R}^d \times \{0\}$, ovvero nelle direzioni parallele all'insieme di degenerazione Σ dell'operatore. È pertanto possibile utilizzare la tecnica del "moving planes", almeno in tali direzioni.

Si studia in questo modo la prima delle due applicazioni, che riguarda il problema

$$\begin{cases} G_\gamma u + f(u) = 0 & \text{in } B_1(0), \\ u > 0 \text{ in } B_1(0), & u \equiv 0 \text{ su } \partial B_1(0), \end{cases} \tag{8}$$

TEOREMA 1. – *Siano $B_1(0) \subset \boldsymbol{R}^{d+k}$ e $u \in \mathcal{C}^2(B_1(0)) \cap \mathcal{C}(\overline{B_1(0)})$ una soluzione del problema* (8), *con f una funzione localmente Lipschitziana, nondecrescente su $\boldsymbol{R}$. Allora $u(x,y)$ è radialmente simmetrica nelle variabili $x \in \boldsymbol{R}^d$ rispetto all'origine. Inoltre u è radialmente decrescente rispetto alle variabili $x \in \boldsymbol{R}^d$.*

Questo risultato per l'operatore di Grushin è analogo a quello del celebre lavoro di Gidas–Ni–Nirenberg [4] per l'operatore di Laplace.

La seconda applicazione riguarda il problema seguente

$$\begin{cases} G_\gamma u + u^p = 0 & \text{in } \boldsymbol{R}^{d+k} \\ u \geq 0 & \text{in } \boldsymbol{R}^{d+k}, \end{cases} \tag{9}$$

per il quale otteniamo il

TEOREMA 2. – *Siano* $Q := (1+\gamma)d + k$ *e* $1 < p < \dfrac{Q+2}{Q-2}$. *Se* $0 < \gamma < 1$ *e* $d,\ k \in \boldsymbol{N}$ *oppure se* $\gamma > 0$, $d \in \boldsymbol{N}$ *e* $k \in \boldsymbol{N} \setminus \{1, 2\}$, *allora ogni soluzione* $u \in \mathcal{C}^2(\boldsymbol{R}^{d+k})$ *del problema* (9) *è identicamente nulla su* $\boldsymbol{R}^{d+k}$.

Il problema analogo per l'operatore di Laplace è stato studiato da Gidas–Spruck (1981), e più tardi da Chen–Li [2], che hanno mostrato che ogni soluzione non negativa $u \in \mathcal{C}^2(\boldsymbol{R}^N)$ di $\Delta u + u^p = 0$ in $\boldsymbol{R}^N$ è identicamente nulla, se $N \geq 3$ e $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$.

La quantità Q che compare nell'enunciato gioca il ruolo di una dimensione omogenea per $\boldsymbol{R}^N$, quando viene dotato di una distanza opportuna che è strettamente legata all'operatore di Grushin, e $p^* := \dfrac{Q+2}{Q-2}$ è collegato anche ad un fenomeno di indice critico di immersione in $L^p(\Omega)$ per le versioni pesate degli spazi di Sobolev classici $H_0^1(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$, come studiato da Franchi–Lanconelli [3].

La dimostrazione del teorema 2 è basata sulla tecnica dei "moving planes" dall'infinito. Ingredienti fondamentali per implementare tale tecnica sono l'esistenza di una trasformata di Kelvin per l'operatore di Grushin, vedi anche Lupo–Payne [5], e l'introduzione di una certa funzione ausiliaria, che però siamo riusciti a produrre solo per i casi $0 < \gamma < 1$ e $d, k \in \boldsymbol{N}$ oppure $\gamma > 0$, $d \in \boldsymbol{N}$ e $k \in \boldsymbol{N} \setminus \{1, 2\}$. Si mostra così che ogni soluzione di (9) per $1 < p < p^*$ deve essere indipendente dalle variabili $x \in \boldsymbol{R}^d$. Il problema studiato si riduce così a quello classico per l'operatore di Laplace in $\boldsymbol{R}^k$, e quindi si ottiene la tesi, cioè $u \equiv 0$.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. AGMON, L. NIRENBERG and M.H. PROTTER. *A maximum principle for a class of hyperbolic equations and applications to equations of mixed elliptic-hyperbolic type*, Comm. Pure Appl. Math., **6** (1953), 455-470.

[2] W. CHEN and C. LI. *Classification of solution of some nonlinear elliptic equations*, Duke Math J., **63** (3) (1991), 615-622.

[3] B. FRANCHI and E. LANCONELLI. *An embedding theorem for Sobolev spaces related to nonsmooth vector fields and Harnack inequality*, Comm. Partial Differential Equations, **9** (13) (1984), 1237-1264.

[4] B. GIDAS, W.M. NI and L. NIRENBERG. *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys., **68** (3) (1979), 209-243.

[5] D. LUPO and K.R. PAYNE. *Conservation laws for equations of mixed elliptic-hyperbolic and degenerate types*, Duke Math. J., **127** (2) (2005), 251-290.

Dipartimento di Matematica "F. Enriques", Università degli Studi di Milano
e-mail: monticel@mat.unimi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Milano) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Kevin R. Payne, Università degli Studi di Milano