
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE MAZZUOCCOLO

2-fattorizzazioni del grafo completo con un prefissato gruppo di automorfismi

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1 (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 299–302.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_299_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_299_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

2-fattorizzazioni del grafo completo con un prefissato gruppo di automorfismi

GIUSEPPE MAZZUOCCOLO

1. – Introduzione e Definizioni Preliminari.

In questa nota Γ indicherà un grafo semplice, non-orientato e privo di cappi. Con $V(\Gamma)$ e $E(\Gamma)$ indicheremo rispettivamente l'insieme dei vertici e l'insieme degli spigoli di Γ . Un r -fattore di un grafo Γ è un sottografo F ricoprente r -regolare, mentre una r -fattorizzazione $\mathcal{F}$ è una partizione degli spigoli di Γ in r -fattori. In particolare, ci occuperemo di 2-fattorizzazioni del grafo completo K_v , cioè del grafo con insieme di vertici di cardinalità v ed insieme di spigoli dato da tutte le possibili coppie non-ordinate di vertici distinti. Nel caso in cui ogni 2-fattore è formato da un unico ciclo la 2-fattorizzazione si dirà Hamiltoniana.

Si osserva facilmente che condizione necessaria per l'esistenza di una 2-fattorizzazione del grafo completo è che il numero v di vertici sia dispari. La sufficienza di tale condizione è poi garantita dal seguente teorema generale di Petersen.

TEOREMA 1. – *Ogni grafo regolare di grado pari ammette un 2-fattore.*

Già Kirkman nel 1850 e Lucas nel 1883 fornirono esempi di 2-fattorizzazioni di tipo speciale. Attualmente sono disponibili in letteratura numerose costruzioni di 2-fattorizzazioni (o decomposizione in cicli) di vari tipi di grafi.

Nonostante sia semplice costruire 2-fattorizzazioni del grafo completo, il problema di enumerarle a meno di isomorfismi sembra piuttosto difficile ed è evidente come il numero di 2-fattorizzazioni non-isomorfe cresca enormemente al crescere del numero di vertici. Poiché la classificazione generale di questi oggetti appare un problema troppo ambizioso, si tenta di descrivere 2-fattorizzazioni che soddisfano ulteriori ipotesi. Queste ipotesi solitamente riguardano o una limitazione sul tipo di 2-fattori o sul gruppo di automorfismi della 2-fattorizzazione. In particolare, noi ci occuperemo di questo secondo aspetto, ma vedremo poi come i due casi siano in certe occasioni collegati.

Si osservi inoltre come un problema analogo sia stato trattato per le 1-fattorizzazioni: Cameron e Phelps dimostrano indipendentemente che quasi ogni 1-fattorizzazione del grafo completo è rigida (con gruppo di automorfismi banale), cioè dimostrano che la sottoclasse delle 1-fattorizzazioni rigide asintoticamente copre la

classe di tutte le 1-fattorizzazioni. Sfortunatamente un risultato analogo non è disponibile per le 2-fattorizzazioni, per quanto sia estremamente ragionevole supporlo. In altre parole le 2-fattorizzazioni con un gruppo di automorfismi non-banale sembrano essere rare e questo lascia sperare di poter ottenere qualche risultato di classificazione all'interno di questa classe. I risultati principali di questa nota si inseriscono in questo ambito di ricerca.

2. – Azione sui vertici.

In alcuni recenti articoli ci si è occupati di costruire e classificare, dove possibile, 2-fattorizzazioni del grafo completo che ammettono un gruppo di automorfismi con una particolare azione o sull'insieme dei vertici o sull'insieme dei 2-fattori.

Un lavoro che si inserisce in quest'ottica è dovuto a Buratti e Rinaldi, [2]. L'ipotesi in questo caso è di avere 2-fattorizzazioni con un gruppo di automorfismi G che agisce in modo regolare (strettamente 1-transitivo) sui vertici. L'esistenza di una tale 2-fattorizzazione implica che l'ordine di G sia dispari ed uguale al numero v di vertici. L'insieme dei vertici $V(K_v)$ può essere dunque identificato con G e l'azione regolare di G sui vertici è definita da $a \rightarrow ag$, per ogni coppia $(a, g) \in V(K_v) \times G$. L'azione di G si estende poi in modo naturale a spigoli, cicli e 2-fattori.

In [2] si fornisce un metodo per costruire una 2-fattorizzazione del grafo completo con gruppo regolare G , introducendo la definizione di 2-starter in un gruppo G di ordine dispari e provando poi che l'esistenza di un 2-starter in G è equivalente alla realizzazione di una 2-fattorizzazione con gruppo G che agisce in modo regolare sui vertici. Vale la pena sottolineare che il concetto di 2-starter permette di affrontare il problema della decomposizione del grafo lavorando completamente all'interno del gruppo G e quindi di affrontare un problema di natura prettamente combinatoria col supporto dello strumento algebrico. La prima domanda che viene naturale porsi in tali contesti è quella dell'esistenza di tali oggetti. In questo caso la risposta è data in modo completo dal seguente teorema.

TEOREMA 2. – *Per ogni gruppo G di ordine dispari esiste una 2-fattorizzazione G -regolare di K_v .*

In precedenza era stato affrontato in dettaglio da Buratti e Del Fra lo studio del caso particolare delle 2-fattorizzazioni Hamiltoniane regolari con gruppo ciclico. Anche in questo caso si è arrivati a un risultato completo per quanto riguarda l'esistenza di tali 2-fattorizzazioni.

TEOREMA 3. – *Una 2-fattorizzazione Hamiltoniana di K_v con gruppo di automorfismi ciclico e regolare sui vertici esiste se e solo se v è un intero dispari con $v \neq 15$ e $v \neq p^a$ dove p è primo e $a > 1$.*

Buratti e Rinaldi hanno successivamente considerato 2-fattorizzazioni con un gruppo di automorfismi che fissa un vertice e agisce regolarmente sui rimanenti. Anche in questo caso la definizione di un opportuno concetto di starter permette di affrontare il problema all'interno del gruppo astratto G . È interessante notare che lo studio delle 2-fattorizzazioni con questa particolare azione ha permesso di costruire nuovi esempi per problemi combinatori classici come ad esempio il problema di Oberwolfach.

Per quanto riguarda l'azione sui vertici, il risultato principale che abbiamo ottenuto è stato quello della classificazione di ogni possibile 2-fattorizzazione con gruppo di automorfismi 2-transitivo sui vertici, [1]. Ricordiamo che l'azione di un gruppo G su un insieme X si dice 2-transitiva se, comunque fissate due coppie ordinate (x_1, y_1) e (x_2, y_2) di elementi di X , con $x_i \neq y_i$, esiste un elemento $g \in G$ tale che $x_1g = x_2$ e $y_1g = y_2$. Il nostro risultato si affianca ad un lavoro del 1993 di Cameron e Korchmaros [3] in cui si classificano le 1-fattorizzazioni con gruppo 2-transitivo.

La forte simmetria richiesta in questo caso ci permette di arrivare ad una classificazione completa di tali 2-fattorizzazioni.

TEOREMA 4. – *Sia $\mathcal{F}$ una 2-fattorizzazione di un grafo Γ con gruppo di automorfismi 2-transitivo sui vertici. Allora $\Gamma \equiv K_v$, $v = p^d$, $p > 2$ primo ed $\mathcal{F}$ deriva dal parallelismo dello spazio affine $AG(d, p)$.*

La dimostrazione procede seguendo i seguenti passi.

- Si dimostra che ogni 2-fattorizzazione 2-transitiva è identificabile con un parallelismo di un 2-disegno 2-transitivo.
- Si utilizza la classificazione dei 2-disegni 2-transitivi di Kantor [4] (conseguenza della classificazione dei gruppi semplici).
- Si escludono tutti i casi diversi dallo spazio affine con l'uso di argomenti ad hoc di natura combinatoria o geometrica.
- Si costruisce esplicitamente la 2-fattorizzazione a partire dal parallelismo standard dello spazio affine.

In seguito abbiamo indebolito l'ipotesi di 2-transitività ottenendo che nel caso 2-omogeneo (coppie non ordinate) le 2-fattorizzazioni possibili sono ancora tutte e sole quelle 2-transitive. Indebolendo ancora l'ipotesi sull'azione del gruppo, considerando G primitivo sui vertici, si è dimostrato che nel caso Hamiltoniano ancora una volta non si ottengono 2-fattorizzazioni diverse da quelle 2-transitive, mentre nel caso non-Hamiltoniano, adattando una tecnica (translazioni miste) già utilizzata per le 1-fattorizzazioni, si sono costruite classi infinite di esempi primitivi ma non 2-transitivi.

3. – Azione sui fattori.

Kaplan, Lev e Roditty [5] hanno considerato 2-fattorizzazioni che ammettono un gruppo di automorfismi regolare sui vertici, ottenendo alcune condizioni necessarie per l'esistenza di tali 2-fattorizzazioni.

Seguendo questa linea di studio ci siamo occupati di 2-fattorizzazioni con gruppo di automorfismi 2-transitivo sui 2-fattori. In questo caso non siamo riusciti di fornire una classificazione completa, se non nel caso Hamiltoniano, ma abbiamo fornito due metodi per costruire classi infinite di esempi ed abbiamo ottenuto alcune condizioni necessarie per l'esistenza, di cui le più significative sono contenute nei seguenti teoremi.

TEOREMA 5. – *Sia $\mathcal{F}$ una 2-fattorizzazione del grafo completo che ammette un gruppo di automorfismi 2-transitivo sui fattori. Allora ogni 2-fattore di $\mathcal{F}$ contiene un 3-ciclo.*

TEOREMA 6. – *Se un 2-fattore di $\mathcal{F}$ contiene un ciclo di lunghezza $2k$, allora ogni 2-fattore di $\mathcal{F}$ è formato da un 3-ciclo e da $2k$ -cicli.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. BONISOLI, M. BURATTI, G. MAZZUOCCOLO, *Doubly transitive 2-factorizations*, J. Combin. Des, **15** (2007), 120-132.
- [2] M. BURATTI, G. RINALDI, *On sharply vertex transitive 2-factorizations of the complete graph*, J. Combin. Theory Ser. A, **111** (2005), 245-256.
- [3] P. J. CAMERON, G. KORCHMAROS, *One-factorizations of complete graphs with a doubly transitive automorphism group*, Bull. London Math. Soc., **25** (1993), 1-6.
- [4] W. KANTOR, *Homogeneous Designs and Geometric Lattices*, J. Combin. Theory Ser. A, **38** (1985), 66-74.
- [5] G. KAPLAN, A. LEV, Y. RODITTY, *Regular Oberwolfach problems and group sequencings*, J. Combin. Theory Ser. A, **96** (2001), 1-19.

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata,
Università di Modena e Reggio Emilia
e-mail: mazzuoccolo@unimore.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Modena) - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Prof.ssa G.Rinaldi, Università di Modena e Reggio Emilia