La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Daniele Marazzina

Proprietà di stabilità per metodi Discontinuous Galerkin in forma mista

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 295–298.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_295_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 295-298

Proprietà di stabilità per metodi Discontinuous Galerkin in forma mista

DANIELE MARAZZINA

1. – Introduzione.

Lo scopo della tesi è stato trovare la stabilizzazione minimale per una classe di metodi agli elementi finiti di tipo Discontinuous Galerkin (DG) in forma mista per problemi ellittici.

I metodi agli elementi finiti sono tecniche ben note e altamente efficaci per il calcolo approssimato di soluzioni di problemi ai limiti complessi. Introdotti negli anni Cinquanta in un contesto di ingegneria strutturale, questi metodi sono stati ampiamente studiati e sviluppati negli ultimi anni.

Nel 1973 Reed e Hill introdussero il primo metodo agli elementi finiti DG per problemi iperbolici e da quel momento vi è stato un attivo sviluppo. Si tratta di metodi localmente conservativi, stabili e accurati, che, essendo basati su spazi di approssimazione completamente discontinui, possono facilmente gestire complesse geometrie, mesh irregolari con hanging nodes e approssimazioni polinomiali utilizzando funzioni di diverso grado in diversi elementi. La necessità di affrontare problemi che, insieme a una parte convettiva dominante, hanno una non trascurabile parte diffusiva ha spinto vari autori ad estendere i metodi DG a problemi ellittici (per una dettagliata bibliografia si faccia riferimento a [1]).

Nella tesi ho presentato nuove formulazioni stabilizzate del metodo Bassi-Rebay [2] e del metodo Local Discontinuous Galerkin (LDG), introdotto nel 1998 da Cockburn e da Shu in [4]. In particolare mi sono occupato di stabilizzazione che consistono nel penalizzare i salti della soluzione discreta. In generale, un'eccessiva penalizzazione può portare a sistemi molto malcondizionati, mentre una sotto-penalizzazione può dar luogo ad instabilità e/o schemi sub-ottimali.

Lo scopo della tesi è stato quindi scoprire come possiamo ridurre il termine di penalizzazione proposto per la formulazione originale del metodo LDG in modo tale che questa sotto-penalizzazione non faccia perdere stabilità allo schema. Questo nuovo termine di penalizzazione è stato inoltre utilizzato per stabilizzare il metodo originale di Bassi-Rebay, che è noto essere instabile.

Più precisamente, ho mostrato che, al fine di raggiungere la stabilità, è sufficiente aggiungere termini di penalizzazione dei salti della soluzione discreta solo su una parte del bordo del dominio Γ, anziché sull'intero scheletro della mesh, come avviene solitamente (si veda ad esempio [1]); inoltre ho analizzato l'ordine di convergenza per il nuovo metodo con stabilizzazione ridotta. Nella tesi ho individuato due possibili scelte di Γ: la prima minimale, ma dipendente dalla mesh; la seconda, che include la precedente, indipendente dalla mesh, ma definita solo limitatamente a domini rettangolari. Per semplicità di esposizione, considererò in questa trattazione solo la seconda scelta.

2. – Il problema modello e la formulazione DG.

Si consideri il problema modello

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad u = g \text{ su } \partial\Omega$$

e la sua formulazione mista

$$\boldsymbol{\sigma} = \nabla u \text{ in } \Omega, \quad -\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = f \text{ in } \Omega, \quad u = g \text{ on } \partial\Omega.$$

Sia $\mathcal{E}$ lo scheletro della nostra mesh di granularità h, $\mathcal{E}^0$ l'insieme degli elementi dello scheletro della mesh che non appartengono al bordo del dominio e $\mathcal{E}^\partial = \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}^0$; siano inoltre $\boldsymbol{\Sigma}_h$ e V_h gli spazi discontinui in cui cerchiamo le approssimazioni discrete di $\boldsymbol{\sigma}$ e u, rispettivamente, cioè

$$V_h = \{ v_h \in L^2(\Omega) \text{ t.c. } v_{h|_T} \in S^k(T)\ \forall\, T \in \mathcal{T}_h \}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_h = V_h^2,$$

con S^k uguale a P^k (i.e., polinomi di grado al più k) per mesh triangolari, o S^k uguale a Q^k (i.e., polinomi di grado al più k in ciascuna variabile) per griglie cartesiane, per un intero $k \geq 1$.

Se indichiamo con $[[\cdot]]$ e $\{\{\cdot\}\}$ rispettivamente gli operatori di salto e di media (si veda, ad esempio, [1]), possiamo definire l'operatore di lifting $R : [L^1(\mathcal{E})]^2 \to \boldsymbol{\Sigma}_h$ come

$$\int_\Omega R(\boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{\tau}\, dx = -\int_{\mathcal{E}} \boldsymbol{\phi} \cdot \{\{\boldsymbol{\tau}\}\}\, ds \qquad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \boldsymbol{\Sigma}_h.$$

Il metodo DG proposto da Bassi e Rebay in [2] è formulato nel modo seguente:

$$\text{trovare } u_h \in V_h \text{ t.c. } \int_\Omega (\nabla u_h + R([[u_h]])) \cdot (\nabla v_h + R([[v_h]]))\, dx = 0 \quad \forall\, v_h \in V_h.$$

È noto che tale formulazione è instabile e le stabilizzazioni presenti in letteratura consistono nell'introdurre nella formulazione un termine di penalizzazione dei salti su tutto lo scheletro della mesh.

La formulazione del metodo LDG è invece

$$\text{trovare} \quad u_h \in V_h \text{ t.c. } \forall\, v_h \in V_h$$
$$\int_\Omega (\nabla_h u_h + R([[u_h]]) + L_{\boldsymbol\beta}([[u_h]])) \cdot (\nabla_h v_h + R([[v_h]]) + L_{\boldsymbol\beta}([[v_h]]))\, dx$$
$$+ \int_{\mathcal{E}} a\, [[u_h]] \cdot [[v_h]]\, ds = \int_\Omega f\, v_h dx,$$

con $a > 0, \boldsymbol\beta \in \mathbb{R}^2$ e dove l'operatore di lifting $L_{\boldsymbol\beta}$ è definito come

$$\int_\Omega L_{\boldsymbol\beta}(\boldsymbol\phi) \cdot \boldsymbol\tau_h\, dx = -\int_{\mathcal{E}^0} \boldsymbol\beta \cdot \boldsymbol\phi [[\boldsymbol\tau_h]]\, ds \quad \forall\, \boldsymbol\tau_h \in \boldsymbol\Sigma_h.$$

Si noti che il termine di stabilizzazione del metodo

$$\int_{\mathcal{E}} a\, [[u_h]] \cdot [[v_h]]\, ds$$

penalizza i salti su tutto lo scheletro della mesh. Per ulteriori informazioni si faccia riferimento a [1].

3. – La riduzione del termine di stabilizzazione.

In questo contesto, ho dimostrato che è possibile ridurre la stabilizzazione considerando il termine di penalizzazione dei salti solo su una parte del bordo del dominio.

TEOREMA 1. – *Sia Ω un dominio rettangolare, $\boldsymbol\beta \in \mathbb{R}^2$ e Γ definito come segue:*

$$\Gamma = \Gamma(\boldsymbol\beta) = \{(x, y) \in \partial\Omega \text{ t.c. } \boldsymbol\beta \cdot \boldsymbol n \leq 0\},$$

dove $\boldsymbol n$ è il vettore normale unitario uscente da Ω (se $\boldsymbol\beta \cdot \boldsymbol n = 0$ su due lati del dominio paralleli, possiamo includere in Γ solo uno di essi).

Allora la formulazione

$$\text{trovare} \quad u_h \in V_h \text{ t.c. } \forall\, v_h \in V_h$$
$$\int_\Omega (\nabla u_h + R([[u_h]]) + L_{\boldsymbol\beta}([[u_h]])) \cdot (\nabla v_h + R([[v_h]]) + L_{\boldsymbol\beta}([[v_h]]))\, dx$$
$$+ \int_\Gamma a\, [[u_h]] \cdot [[v_h]]\, ds = 0,$$

con $a > 0$ (costante o dipendente da h^{-1}), è stabile.

Nel caso in cui $\boldsymbol\beta = \boldsymbol 0$ (e quindi Γ consiste di due lati di bordo non paralleli) si ha quindi una nuova stabilizzazione per il metodo Bassi-Rebay. Per maggiori dettagli si veda [5].

4. – Stime d'errore.

Oltre a studiare la stabilità del nuovo metodo introdotto, ho ricavato stime *a priori* dell'errore, limitatamente a griglie Cartesiane. Tutti i risultati teorici sono stati validati da prove numeriche effettuate con codici MATLAB da me scritti.

Per quanto riguarda il caso in cui $\boldsymbol{\beta}$ abbia almeno una delle due componenti nulle (considerando quindi anche il metodo Bassi-Rebay con stabilizzazione ridotta), gli esperimenti numerici hanno evidenziato, limitatamente al caso di griglie Cartesiane, una differenza negli ordini di convergenza a seconda che il grado k dei polinomi di approssimazione sia pari o dispari. Infatti l'ordine di convergenza che si ottiene è ottimale, sia in norma L^2 che in norma dell'energia, per k pari, mentre è sub-ottimale per k dispari. Questo fenomeno era stato riscontrato anche per il metodo Bassi-Rebay originale (si veda [3]). Le stime *a priori* che ho ricavato non riescono per ora a spiegare questa differenza e pertanto sono esatte (*sharp*) solo se k è dispari.

Per quanto riguarda invece il caso in cui $\boldsymbol{\beta}$ non abbia componenti nulle, gli esperimenti numerici hanno evidenziato ordini di convergenza ottimali in entrambe le norme considerate, indipendentemente dalla scelta del parametro di penalizzazione a; le stime d'errore invece sono *sharp* per a dell'ordine di h^{-1} (ordine di convergenza $k+1$ per l'errore in norma L^2, k per la norma dell'energia), mentre non lo sono (tranne per particolari valori di $\boldsymbol{\beta}$) se il parametro di penalizzazione è indipendente da h (ordine di convergenza $k+\frac{1}{2}$ e $k-\frac{1}{2}$ rispettivamente). Da notare che in quest'ultimo caso non sono presenti in letteratura stime *sharp* per il metodo LDG originale.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARNOLD D.N., BREZZI F., COCKBURN C. and MARINI L.D., *Unified Analysis of DG Methods for Elliptic Problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis, **39** (2002), 1749-1779.

[2] BASSI F. and REBAY S., *A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier-Stokes Equations*, Journal of Computational Physics, **131** (1997), 267-279.

[3] BASSI F., REBAY S., MARIOTTI G., PEDINOTTI S. and SAVINI M., *A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for Inviscid and Viscous Turbomachinery Flow*, Second European Conference on Turbomachinery, Fluid Dynamics and Thermodynamics, Technologisch Instituut, Antwerpen (Eds. Decuypere R. and Dibelius G.) (1997), 99-108.

[4] COCKBURN B. and SHU C.W., *The Local Discontinuous Galerkin Method for Time-Dependent Convection-Diffusion Systems*, Journal on Numerical Analysis, **35-6** (1998), 2440-2463.

[5] MARAZZINA D., *Stability Properties of Discontinuous Galerkin Methods for 2D Elliptic Problems*, IMA Journal of Numerical Analysis, **doi: 10.1093/imanum/drm020** (2007), 1-28.

Dipartimento di Scienze Economiche e Metodi Quantitativi
Università degli Studi del Piemonte Orientale "A. Avogadro"
e-mail: daniele.marazzina@eco.unipmn.it
Dottorato in Matematica e Statistica (sede amministrativa: Università di Pavia) - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Prof.ssa Ilaria Perugia, Università degli Studi di Pavia