La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Annamaria Lucibello

Gruppi con alcune condizioni sui sottogruppi abeliani

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 287–289.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_287_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 287-289

Gruppi con alcune condizioni sui sottogruppi abeliani

ANNAMARIA LUCIBELLO

1. – Introduzione.

Si sono studiate classi di gruppi con alcune condizioni sui sottogruppi abeliani.

Il punto di partenza è una dimostrazione, dovuta a H. J. Zassenhaus, del famoso teorema di Maclagan-Wedderburn, che assicura che ogni corpo finito è un campo. Questa dimostrazione utilizza il seguente risultato di Zassenhaus: un gruppo finito è abeliano se e solo se il normalizzante e il centralizzante di ogni sottogruppo abeliano coincidono ([6]). In prima analisi, l'idea è stata quella di estendere il risultato di Zassenhaus ad alcune classi di gruppi infiniti.

In generale, per i gruppi infiniti, il teorema di Zassenhaus non vale; ogni gruppo libero non abeliano fornisce un ovvio controesempio. Si è ottenuto, però, lo stesso risultato per alcune classi di gruppi infiniti: la classe dei gruppi iper-localmente (finiti o risolubili) e la classe dei 2-gruppi infiniti.

Generalizzando la classe dei gruppi introdotta da Zassenhaus, si è, poi, introdotta la seguente:

DEFINIZIONE 1. – *Un gruppo G è chiamato un NC-gruppo se $C_G(A) = A$ o $C_G(A) = N_G(A)$, per ogni sottogruppo abeliano A di G.*

Gli NC-gruppi finiti sono stati recentemente studiati da Li Shirong ([5]). Egli ha provato che un p-gruppo finito è un NC-gruppo se e solo se è abeliano o di ordine p^3. Inoltre, egli ha caratterizzato gli NC-gruppi finiti semplici non abeliani e gli NC-gruppi finiti risolubili non abeliani il cui ordine non è potenza di un primo.

Si sono studiati gli NC-gruppi infiniti e si è provato che un NC-gruppo localmente risolubile è o abeliano o finito. Da ciò segue che un NC-gruppo infinito localmente finito è abeliano.

Un risultato simile vale per i 2-gruppi infiniti.

Generalizzando ulteriormente la classe dei gruppi studiata da Zassenhaus, si è, poi, introdotta la classe seguente:

DEFINIZIONE 2. – *Un 2-gruppo G è chiamato un AC-2-gruppo se $|N_G(A) : C_G(A)| \leq 2$, per ogni sottogruppo abeliano A di G.*

Come per gli NC-gruppi, la classe degli AC-2-gruppi è stata recentemente studiata nel caso finito da Li Shirong ([4]).

Egli ha provato che un 2-gruppo finito G è un AC-2-gruppo se e solo se esiste un AC-sottogruppo H di G tale che $Z(H) \subseteq \Phi(H)$ e $G = Z(G)H$. Inoltre, egli ha dimostrato che un 2-gruppo finito G con $Z(G) \leq \Phi(G)$ è un AC-2-gruppo se e solo se $G \simeq A(m,n,s)$ per opportuni m,n e s, dove $A(m,n,s) = \langle a,b,c | a^{2^n} = b^{2^m} = c^{2^s} = 1, b^{-1}ab = a^{-1}c, [a,c] = [b,c] = 1\rangle$, con $n \geq s \geq 0$, $m \geq s \geq 0$. Infine, egli ha provato che un gruppo finito G è un AC-2-gruppo se e solo se $G/Z(G)$ è un 2-gruppo diedrale.

Si sono studiati gli AC-2-gruppi infiniti e, in analogia con i risultati di Li Shirong, si è provato che se G è un AC-2-gruppo non abeliano localmente finito allora $G = Z(G)H$, dove H è finito o H è il gruppo localmente diedrale infinito.

Generalizzando il concetto di AC-2-gruppi, si è studiata, infine, la classe degli AC-gruppi.

DEFINIZIONE 3. – *Un gruppo G è un AC-gruppo se $|N_G(A) : C_G(A)| < \infty$, per ogni sottogruppo abeliano A di G.*

Si è osservato che ogni gruppo centrale per finito è un AC-gruppo e che condizione sufficiente affinchè un gruppo G sia un AC-gruppo è che esista un AC-sottogruppo H tale che $G = Z(G)H$.

Si è ottenuta, così, una caratterizzazione degli AC-gruppi nilpotenti.

2. – Risultati Principali.

Per ciò che concerne la generalizzazione del teorema di Zassenhaus, si è esteso quest'ultimo ad alcune classi di gruppi infiniti ottenendo i seguenti:

TEOREMA 1. – *Sia G un gruppo iper-localmente (finito o risolubile), tale cioè che esista una serie ascendente di G a fattori localmente finiti o localmente risolubili. Allora G è abeliano se e solo se $N_G(A) = C_G(A)$, per ogni sottogruppo abeliano A di G.*

TEOREMA 2. – *Sia G un 2-gruppo infinito. Allora G è abeliano se e solo se $N_G(A) = C_G(A)$, per ogni sottogruppo abeliano A di G.*

È da notare che esistono, con p sufficientemente grande, p-gruppi infiniti non abeliani in cui coincidono centralizzante e normalizzante di ogni sottogruppo proprio; infatti, godono di tale proprietà i gruppi di Tarski, p-gruppi semplici infiniti in cui ogni sottogruppo proprio ha ordine p.

I risultati ottenuti sugli NC-gruppi infiniti, analoghi a quelli dovuti a Li Shirong nel caso finito, sono i seguenti:

TEOREMA 3. – *Sia G un gruppo localmente risolubile. Se G è un NC-gruppo, allora G è abeliano o finito.*

TEOREMA 4. – *Sia G un gruppo infinito radicale, tale cioè che esista una serie ascendente di G a fattori localmente nilpotenti. Se G è un NC-gruppo, allora G è abeliano.*

TEOREMA 5. – *Sia G un gruppo infinito localmente finito. Se G è un NC-gruppo, allora G è abeliano.*

TEOREMA 6. – *Sia G un 2-gruppo. Se G è un NC-gruppo, allora o G è abeliano o G è finito di ordine 8.*

Si noti che non si può estendere il risultato dei teoremi precedenti ad un qualunque NC-gruppo periodico infinito; infatti, i gruppi di Tarski sono NC-gruppi non abeliani, periodici e infiniti.

Per la classe degli AC-2-gruppi infiniti, si è, poi, provato che:

TEOREMA 7. – *Sia G un AC-2-gruppo non abeliano localmente finito. Allora $G = Z(G)H$, dove o H è finito o H è il gruppo localmente diedrale infinito, cioè è prodotto semidiretto di $Z(2^\infty)$ e $\langle x \rangle$ con $a^x = a^{-1}$, per ogni $a \in Z(2^\infty)$.*

Infine, considerando gli AC-gruppi, si conclude col seguente:

TEOREMA 8. – *Sia G un gruppo nilpotente. Allora G è un AC-gruppo se e solo se G è centrale per finito.*

BIBLIOGRAFIA

[1] H. E. GOHEEN, *On a theorem of Zassenhaus,* Proc. Amer. Math. Soc., **5** (1954), 799-800.

[2] A. LUCIBELLO, *Groups with conditions on the abelian subgroups,* inviato per pubblicazione

[3] M. MIYAMOTO, *Solvability of some groups,* Hokkaido Math. J., **11** (1982), 106-110.

[4] LI SHIRONG, *Finite 2-groups with large centralisers of abelian subgroups,* Proc. Royal Irish Academy, **104**A (2) (2004), 191-197.

[5] LI SHIRONG, *The Structure of NC-Groups,* J. Algebra, **241** (2001), 611-19.

[6] H. J. ZASSENHAUS, *A group-theoretic proof of a theorem of Maclagan-Wedderburn,* Proc. Glasgow Math. Assoc., **1** (1952), 53-63.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Salerno
e-mail: annamaria.lucibello@libero.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Salerno) -
Ciclo XX (VI Nuova Serie)
Direttori di ricerca: Prof.ssa Patrizia Longobardi, Università degli Studi di Salerno;
Prof.ssa Mercede Maj, Università degli Studi di Salerno.