La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Roberto Guenzani

Modelli probabilistici su alberi con interazioni intragenerazionali: meccanica statistica e applicazioni

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 283–286.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_283_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 283-286

Modelli probabilistici su alberi con interazioni intragenerazionali: meccanica statistica e applicazioni

ROBERTO GUENZANI

1. – Modello di trasmissione su alberi e computazione emergente.

Il modello di computazione rumorosa di Von Neumann su un grafo ad albero $T = (V, E)$ con vertci v e rami e consiste nella trasmissione di un segnale $s_0 = 0, 1$ non sbilanciato posto all'origine 0 dell'albero. La trasmissione avviene in modo indipendente ramo dopo ramo con probabilità di distorsione ε. In [2] è stato proposto come criterio di ricostruzione la regola di massima verosimiglianza che valuta se è maggiore di zero la differenza media tra la probabilità che s_0 sia 0 oppure 1 al variare delle configurazioni ai bordi. Detta S_{W_n} la configurazione dei segnali al bordo W_n di T_n occorre allora calcolare $\liminf_n \varDelta_n(P_\varepsilon) = \liminf_n E_\varepsilon|P_\varepsilon(s_0 = 1|S_{W_n}) - P_\varepsilon(s_0 = 0|S_{W_n})|$. Viene però dimostrato che su alberi sferici simmetrici questo criterio, che è ottimale ma difficilmente applicabile, equivale a quello a maggioranza $\liminf_n (P_\varepsilon(S'_n > 0|s_0 = 1) - P_\varepsilon(S'_n < 0|s_0 = 1)) > 0$ dove S'_n è la somma al bordo T_n dei segnali rinominati $S' = \{s'_v\}_{v \in T}$ con $s'_v = -1$ quando $s_v = 0$. Detto $br(T)$ il numero di diramazione di T, cioè il valore critico della probabilità con cui elidendo a caso i rami dell'albero sopravvive quasi certamente un insieme connesso di infiniti vertici, il principale risultato è il calcolo della distorsione critica

$$
\begin{aligned}
&1 - 2\varepsilon > br(T)^{-1/2} \Rightarrow \liminf_n \varDelta_n(P_\varepsilon) > 0 \\
&1 - 2\varepsilon < br(T)^{-1/2} \Rightarrow \liminf_n \varDelta_n(P_\varepsilon) = 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Recentemente, nell'analisi del modello di computazione rumorosa, lo studio della elaborazione formale del segnale è stato affiancato dal problema di fare emergere le proprietà computazionali dalla cooperazione statistica di elementi che trasportano l'informazione. Il risultato di questa strategia è il modello dei Vetri di Spin che nella interpretazione di Hopfield descrive l'interazione tra neuroni sotto l'azione eccitatoria ed inibitoria delle sinapsi. In generale esso assegna la distribuzione di probabilità $G_{SG}(\varSigma|\mathcal{J}) = Z(t)^{-1} exp\Big(\sum_{\langle v,v'\rangle} J_{(v,v')}\sigma_v\sigma_{v'}/t\Big)$ ad una configurazione di variabili dette di spin $\varSigma = \{1, -1\}^T$, dove $J_{(v,v')} = \vartheta_{(v,v')}J = \pm J$ sono le interazioni per ogni configurazione $\varTheta = \{\vartheta_e\}_{e \in E}$, t è la temperatura e $Z(t)$ è una costante di normalizzazione (si veda ad esempio [5] come riferimento sulle distribuzioni di Gibbs di cui questa è una generalizzazione). I Vetri di Spin sono caratterizzati dal parametro di

Edwards-Anderson $E_{G_{SG}}(E_{G_{SG}}(\sigma_0|\Theta))^2$ il cui non annullarsi ne caratterizza una fase tipica, detta vetrosa. Nel caso dell'albero, in [1] questa è stata studiata con un procedimento ricorsivo imponendo il valore del parametro di Edwards-Anderson sulle foglie. Questo metodo non è efficace solo dal punto di vista tecnico, ma permette di riprodurre il fenomeno della frustrazione, cioè il fatto che le configurazioni a minima energia non sono determinabili in modo unico. La riformulazione del modello dei Vetri di Spin in termini del modello di Trasmissione risulta completa su alberi regolari ad r figli tenendo conto del risultato di [1] in cui il parametro di Edwards-Anderson per concentrazioni di inibitori $\lambda = 1/2$ ha il valore critico

$$\tanh(J/t_c) = 1/\sqrt{r} \tag{2}$$

che corrisponde a (1) con il cambiamento di variabili $\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = e^{-2J/t}$.

2. – Modelli evolutivi di trasmissione con interazioni intragenerazionali.

Nel pre-print [3] scritto in collaborazione con il prof. Alberto Gandolfi vengono proposti due tipi di auto-correzioni locali al modello di Trasmissione su alberi regolari. Entrambe agiscono periodicamente al passo k modificando il segnale mentre questo è trasmesso. La prima consiste nel cambiare i segnali in accordo alla loro maggioranza; la seconda rimuove i segnali in minoranza (scegliendo a caso se c'è parità). Questo meccanismo induce una distribuzione di probabilità $P_\varepsilon^{(k)}$ che non è più una catena di Markov e permette di definire le distorsioni auto-corrette $\varepsilon_{c,r}(k) = \sup\{\varepsilon : \liminf \Delta_n(P_\varepsilon^{(k)}) > 0\}$. Poiché la rimozione della minoranza lascia almeno $r^k/2$ vertici figli, le parti essenziali dei due modelli non cambiano ed i risultati sono gli stessi.

Come primo risultato principale viene dimostrato che, per ogni k, la k auto-correzione aumenta la distorsione critica se $r > 2$. Questo implica che la sola ricostruzione a massima verosimiglianza senza correzione se pure locale, non rileva tutta l'informazione effettivamente disponibile sull'albero.

TEOREMA 2.1. – *Se $k > 1$ o $k = 1$, $r > 2$ allora* $\varepsilon_{c,r}(k) > \varepsilon_{c,r}$; $\varepsilon_{c,2}(1) = \varepsilon_{c,2}$.

Questo miglioramento stretto viene dimostrato paragonando l'auto-correzione basata sulla trasformazione a maggioranza con una casuale che lascia inalterati i punti critici. Cambiando, poi, il passo k della auto-correzione, viene ottenuta la successione dei valori critici $\{\varepsilon_{c,r}(k)\}_{k\in N}$. Come secondo risultato principale viene dimostrato che l'auto-correzione con k grande migliora ulteriormente la trasmissione. In particolare essa tende al punto critico del modello di Ising (cioè del modello di Vetri di Spin con interazioni tutte positive). Questa stima viene ottenuta confrontando l'informazione che viene propagata in modo inalterato con il rumore esterno. Essa parte dalla rappresentazione FK del modello di Trasmissione con parametro di percolazione $p = 1 - 2\varepsilon$ ed usa tecniche di approssimazione Gaussiana e grandi deviazioni e sembra essere un modo naturale per valutare l'informazione disponibile su un albero.

TEOREMA 2.2. – *Esistono* $c_1, c_2 > 0$ *ed una funzione* $a_k > 0$, $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ *tale che*

$$\frac{1}{r} \vee \frac{1}{c_1^{\frac{1}{2k}} r} \leq p_{c,r}(k) \leq \frac{1 + a_k}{c_2^{\frac{1}{2k}} r} \tag{3}$$

COROLLARIO 2.1 –

$$\lim_{k\to\infty} p_{c,r}(k) = \frac{1}{r}. \tag{4}$$

Questo risultato, dimostrato però solo per il segnale binario, può indicare un fenomeno particolare: sembra che la formazione di regioni uniformi scorrette sia la conseguenza dell'aver migliorato la trasmissione.

3. – Una revisione della computazione emergente per il modello di trasmissione.

L'auto-correzione di trasmissione è stata poi generalizzata al caso stocastico, includendo ogni trasmissione corretta a maggioranza senza sbilanciamento. Passando all'albero di Husimi (un albero fatto da triangoli) è possibile scrivere un modello di Vetri di Spin con interazioni orizzonatli ferromagnetiche equivalente, che assegna cioè la stessa probabilità a configurazioni corrispondenti. Adattando i metodi di [1], con risultati analoghi a quanto già trovato in [4] nel caso di interazioni orizzontali casuali, è stato calcolato il diagramma di fase. Se pure i modelli sono equivalenti, la coincidenza tra essi è ora persa perché i punti critici di Vetro di Spin e di ricostruzione sono diversi, così che la fase vetrosa non trova analogo in termini computazionali.

REMARK 3.1. – *La mancanza di coincidenza dei punti critici nel caso della trasmissione con interazioni a maggioranza sembra testimoniare la difficoltà di adattare la controparte fisica alla computazione emergente nel caso evolutivo.*

Questa osservazione ha suscitato la necessità di capire quale fosse l'origine della coincidenza di (1) e (2). Per questo è stato proposto un modello che generalizza la trasmissione di segnale al caso sbilanciato all'origine ed a probabilità stocastiche. Detto $T_{\to n}$ l'albero arrestato al passo n e ${}^{\leftarrow}v$ il predecessore di v, sia $\{\Omega, F(\Omega), P\}$ uno spazio di probabilità; sia $\tilde{S} = \{\tilde{s}_v : \Omega \to \{0,1\}\}_{v\in T_{\to n}}$ una classe di mappe misurabili tali che $P(\tilde{s}_0 = 1) = \gamma$, $P(\tilde{s}_v = 1|\tilde{s}_{\leftarrow v} = 0) = P(\tilde{s}_v = 0|\tilde{s}_{\leftarrow v} = 1) = \eta$; sia $C = \{p_1, ..., p_l\}$ una classe di probabilità su $\{\Omega, F(\Omega)\}$ tali che $p(\tilde{s}_v = 1|\tilde{s}_{\leftarrow v} = 0), p(\tilde{s}_v = 0|\tilde{s}_{\leftarrow v} = 1) = \eta$; sia $\rho : \Omega \to C$ una mappa misurabile tale che $P(\tilde{S}|\rho = \bar{p}) = \bar{p}(\tilde{S})$. Viene introdotta la mappa $\tilde{\sigma}_0 : \Omega \to \{-1, 1\}$ definita ponendo $\tilde{\sigma}_0 = 1$ se $\rho = \bar{p} : \bar{p}(\tilde{s}_0 = 1) > P(\tilde{s}_0 = 1)$, $\tilde{\sigma}_0 = -1$ se $\rho = \bar{p} : \bar{p}(\tilde{s}_0 = 1) < P(\tilde{s}_0 = 1)$ altrimenti scegliendo $\tilde{\sigma}_0$ a caso. Questo modello permette di dimostare le seguenti affermazioni

PROPOSIZIONE 3.1. – *Nel caso* $\gamma = 1/2$, *il punto critico di ricostruzione corrisponde al punto critico per il parametro* $\liminf_n E_P(E_P(\tilde{\sigma}_0|\tilde{S}_{W_n}))^2$.

PROPOSIZIONE 3.2. – *Nel caso $\lambda = 1/2$ esiste una trasformazione sui parametri tale che il modello di Trasmissione generalizzato in una opportuna classe C presenti lo stesso diagramma di fase dei Vetri di Spin con spin al bordo identici e di Bernoulli di parametro q. Inoltre la distribuzione P sulla classe delle probabilità stocastiche C è ottenuta in funzione del parametro q.*

COROLLARIO 3.1 – *Per un albero sferico simmetrico, il punto critico dei Vetri di Spin con $\lambda = 1/2$ e condizioni al bordo identiche e di Bernoulli si trova risolvendo l'equazione di ricostruzione* (1) *ed è dato da*

$$\tanh(J/t_c) = 1/\sqrt{br(T)}. \tag{5}$$

Siccome la coincidenza tra Vetri di Spin e Trasmissione è persa aumentando la complessità del sistema, si è deciso di riferire il modello di Trasmissione generalizzato al caso opposto, cioè al rilevamento di singola particella usando i parametri che esso fornisce $R_{r,p}(P) = E(E(\tilde{\sigma}_0|\tilde{s}_v))^2 - E(E(\tilde{\sigma}_0|\tilde{s}_{v'}))^2$, $T_{r,p}(P) = \dfrac{1}{r^{|v|}} - \dfrac{1}{r^{|v'|}}$ come parametri di spazio e tempo del cammino P da v a v'. Come conseguenza, la velocità della particella risulta automaticamente limitata chiedendo che questa possa essere rilevata. Prendendo il limite di scala che conserva i punti critici, cioè lungo le successioni $\{p_s = p^{\frac{1}{s}}\}_{s\in N}$, $\{r_s = r^{\frac{1}{s}}\}_{s\in N}$ si ha

PROPOSIZIONE 3.3. – *Assumendo $\forall p \in C$, $p(\tilde{s}_0 = 1) = 1$ o $p(\tilde{s}_0 = 1) = 0$; $\gamma = \frac{1}{2}$ allora $\forall e \in E$*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{R_{r_s,p_s}(e)}{T_{r_s,p_s}(e)} \langle 1 \Leftrightarrow p \rangle p_{c,r}. \tag{6}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] J. CHAYES, L. CHAYES, J.P. SETHNA and D.J. THOULESS, *Bethe Lattice Spin-Glass: The Effect of a Ferromagnetic Bias and External Fields. I Bifurcation Analysis.*, Stat. Phys., **61** (1990), 987-1067.

[2] W. EVANS, C. KENYON, Y. PERES and L. J. SCHULMAN, *Broadcasting on Trees and the Ising Model.*, Ann. Appl. Probab., **10** (2000), 410-433.

[3] A. GANDOLFI and R. G. *Self-Correction of Transmission on Regular Trees.*, Pre-print (2008).

[4] S. KATSURA *Glass-Like Phase on The Close Packed Lattices.* Physica, **88 A** (1977), 583-590.

[5] C. J. PRESTON, *Gibbs States on Countable Sets.*, Cambridge University Press (1974).

Dipartimento di Matematica, Università di Milano
e-mail: guenzani@mat.unimi.it

Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amministrativa: Università di Milano) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. Alberto Gandolfi, Dipartimento di Matematica, Firenze