
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ARDELIO GALLETTI

Analisi dell'errore e regolarizzazione numerica di un metodo per l'inversione della trasformata di Laplace nel caso reale

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione
Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1 (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di
Dottorato), p. 279–282.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_279_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_279_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi dell'errore e regolarizzazione numerica di un metodo per l'inversione della trasformata di Laplace nel caso reale

ARDELIO GALLETTI

1. – Introduzione.

Il presente lavoro di tesi descrive l'attività di ricerca svolta nell'ambito del Dottorato di Ricerca in Scienze Matematiche. L'attività ha principalmente riguardato il problema dell'inversione numerica della trasformata di Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}[f] ,$$

nel caso in cui $F(s)$ è nota solo sull'asse reale. In particolare l'interesse è stato rivolto allo sviluppo di un metodo numerico e del relativo algoritmo a partire da una formula di inversione proposta J.G. Whirter e E.R. Pike [4]. In generale il problema di inversione della trasformata di Laplace nel caso reale si colloca nell'ambito dei problemi inversi e mal posti. La principale metodologia per affrontare tali problemi consiste nell'utilizzo delle *tecniche di regolarizzazione* e, nel caso in esame, tali tecniche sono state discusse da più autori. In tale contesto l'aspetto più difficile riguarda la scelta del valore del *parametro di regolarizzazione* a in corrispondenza del quale la *soluzione regolarizzata* f_a fornisce una approssimazione ragionevole di f . A tal fine è necessario stimare sia gli errori introdotti nell'approccio di regolarizzazione sia l'amplificazione degli errori dovuta al mal condizionamento del problema discreto.

Nel presente lavoro il concetto di regolarizzazione è esteso a quello di *regolarizzazione numerica*. Con tale termine si vuole intendere un insieme di concetti generali, principi e metodologie che permeano interamente l'approccio numerico alla regolarizzazione di un problema inverso. La regolarizzazione numerica consente infatti di calcolare l'approssimazione di f in corrispondenza della quale *l'errore globalmente introdotto dalle approssimazioni numeriche risulti il minimo possibile*.

Si introduce quindi un opportuno *operatore di regolarizzazione numerica* $\Phi_\gamma[F, f]$, ottenuto a partire dalle stime degli errori commessi durante il procedimento di risoluzione numerico-computazionale del problema, e si definisce la *soluzione numerica regolarizzata* come:

$$f_{\gamma_{opt}} = \operatorname{argmin}_\gamma \Phi_\gamma[F, f] ,$$

dove γ_{opt} viene determinato dinamicamente dall'algoritmo numerico

2. – Una formula per l'inversione reale della trasformata di Laplace.

Il punto di partenza nella costruzione dell'operatore Φ_γ è l'espansione in termini di autofunzioni della antitrasformata di Laplace, proposta in [4]. Sotto opportune ipotesi

sulla trasformata F e sull'antitrasformata f , vale la formula di inversione:

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\langle F(\cdot), \psi^+(\omega, \cdot) \rangle}{\lambda^+(\omega)} \psi^+(\omega, t) d\omega + \int_0^{\infty} \frac{\langle F(\cdot), \psi^-(\omega, \cdot) \rangle}{\lambda^-(\omega)} \psi^-(\omega, t) d\omega$$

dove $\psi^{\pm}$ e $\lambda^{\pm}$ sono autofunzioni e autovalori dell'operatore integrale di Laplace e

$$\langle g(\cdot), h(\cdot) \rangle = \int_0^{\infty} g(x)h(x)dx$$

denota il prodotto interno tra g e h . Le autofunzioni $\psi^{\pm}$ sono definite come:

$$\psi^+(\omega, t) = \cos(\rho/2 - \omega \log t) \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \quad e \quad \psi^-(\omega, t) = \sin(\rho/2 - \omega \log t) \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$$

dove $\rho = s_{\omega}/c_{\omega}$, con

$$s_{\omega} = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} \sin(\omega \log t) dt \quad e \quad c_{\omega} = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} \cos(\omega \log t) dt$$

Infine per gli autovalori si ha $\lambda^{\pm}(\omega) = \pm(\pi/\cosh(\pi\omega))^{1/2}$. Posto adesso

$$f_{\bar{\omega}}(t) = \int_0^{\bar{\omega}} \frac{\langle F(\cdot), \psi^+(\omega, \cdot) \rangle}{\lambda^+(\omega)} \psi^+(\omega, t) d\omega + \int_0^{\bar{\omega}} \frac{\langle F(\cdot), \psi^-(\omega, \cdot) \rangle}{\lambda^-(\omega)} \psi^-(\omega, t) d\omega$$

risulta $f(t) = \lim_{\bar{\omega} \rightarrow \infty} f_{\bar{\omega}}(t)$. Anche Zse in teoria al crescere di $\bar{\omega}$, $f_{\bar{\omega}}$ dovrebbe essere un'approssimazione migliore di f , la instabilità intrinseca nel calcolo numerico di $f_{\bar{\omega}}$, dovuta alla presenza degli autovalori al denominatore (che crescono esponenzialmente), rende non semplice la scelta del valore di $\bar{\omega}$ che gioca allora il ruolo del *parametro di regolarizzazione*. Il valore ottimale di $\bar{\omega}$, per il quale si ottiene la massima accuratezza su $f_{\bar{\omega}}$, è stabilito attraverso l'analisi numerica degli errori.

3. – Schema di approssimazione numerica e sorgenti di errore.

A partire dalla formula di inversione, una approssimazione numerica di $f(t)$ può essere ottenuta attraverso il seguente schema:

passo 1: Fissato $\bar{\omega} > 0$ si considera l'operatore di troncamento

$$T_{\bar{\omega}} : F \mapsto f_{\bar{\omega}}(t)$$

passo 2: Assegnata una formula di quadratura numerica Q^h relativa all'intervallo $[0, \bar{\omega}]$ con h massima ampiezza del passo di discretizzazione, si considera l'operatore di discretizzazione

$$\mathcal{D}_h : f_{\bar{\omega}}(t) \mapsto Q^h(f_{\bar{\omega}})$$

e si pone

$$f_{\bar{\omega}}^h(t) = Q^h(f_{\bar{\omega}}(t)) = \mathcal{D}_h(T_{\bar{\omega}}(F))$$

passo 3: Indicata con u la precisione macchina del sistema aritmetico $\mathcal{F}$ considerato, si pone:

$$C_u : f_{\bar{\omega}}^h(t) \mapsto \{f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) = f_{\bar{\omega}}^h(t) (1 + \eta u) \quad (\eta = \text{costante})$$

con C_u operatore di condizionamento che a $f_{\bar{\omega}}^h(t)$ associa il valore corrispondente in $\mathcal{F}$

Partendo da F , seguendo i **passi 1-3**, otteniamo $f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$, approssimazione numerica di $f(t)$.

Allo schema introdotto sono naturalmente associati degli errori: le differenze

$$TE_{\bar{\omega}}(t) = f(t) - f_{\bar{\omega}}(t), \quad DE_{\bar{\omega}}^h(t) = \mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F) - \mathcal{D}_h(\mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F)) = f_{\bar{\omega}}(t) - f_{\bar{\omega}}^h(t)$$

sono rispettivamente *l'errore di troncamento* e *l'errore di discretizzazione*, mentre

$$CE_{\bar{\omega}}(t) = \mathcal{D}_h(\mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F)) - \mathcal{C}_u(\mathcal{D}_h(\mathcal{T}_{\bar{\omega}}(F))) = f_{\bar{\omega}}(t) - f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$$

è *l'errore di condizionamento*. Infine *l'errore globale* introdotto su $f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)$ è dato da

$$GE_{\bar{\omega}}(t) = f(t) - f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t) = TE_{\bar{\omega}}(t) + DE_{\bar{\omega}}^h(t) + CE_{\bar{\omega}}(t)$$

Nel lavoro di tesi sono forniti sia risultati teorici (a priori), basati sulle proprietà analitiche di particolari famiglie di antitrasformate, sia risultati che permettono di ottenere stime calcolabili, a partire dalle quantità effettivamente calcolate.

4. – Analisi dell'errore e regolarizzazione numerica.

La scelta del valore ottimale del parametro $\bar{\omega}$ è basata sulla seguente:

DEFINIZIONE 1. – Denotato con

$$\Phi_{\bar{\omega}}[F, f] = \|\sqrt{t}GE_{\bar{\omega}}(t)\|_{\infty} = \sup_{t>0} \sqrt{t}|f(t) - f_{\bar{\omega}}^{h,u}(t)|$$

l'operatore di regolarizzazione numerica, la funzione

$$f_{\omega_{opt}}^{h,u}(t) = \operatorname{argmin}_{\bar{\omega}>0} \Phi_{\bar{\omega}}[F, f]$$

è detta soluzione numerica regolarizzata e ω_{opt} parametro di regolarizzazione numerica ottimale.

Le espressioni dell'antitrasformata f e dell'operatore di regolarizzazione numerica $\Phi_{\bar{\omega}}[F, f]$ non sono note. Pertanto il valore di ω_{opt} è stimato computazionalmente attraverso l'analisi dell'errore. Riportiamo qui uno dei principali risultati. Posto

$$c^{\pm}(\omega) = \langle F(\cdot), \psi^{\pm}(\omega, \cdot) \rangle \quad e \quad N(\omega) = \left(\left(\frac{c^{+}(\omega)}{\lambda^{+}(\omega)} \right)^2 + \left(\frac{c^{-}(\omega)}{\lambda^{-}(\omega)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

si mostra, a seconda delle caratteristiche di regolarità dell'antitrasformata, che sono tipici per $N(\omega)$ due comportamenti asintotici:

$$N(\omega) = \mathcal{O}(\omega^{-K}) \quad o \quad N(\omega) = \mathcal{O}(e^{-K\omega})$$

Fissate allora $C_1, C_2 > 0$, poniamo

$$(1) \quad TB(\bar{\omega}) := \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{C_1}{C_2} e^{-C_2 \bar{\omega}} & \text{se risulta } N(\omega) \leq C_1 e^{-C_2 \omega} \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{C_1}{C_2} \bar{\omega}^{-C_2} & \text{se risulta } N(\omega) \leq C_1 \omega^{-(C_2+1)} \end{cases}.$$

Si suppone di avere un dato con errore $\tilde{F}(s) = F(s)(1 + \delta(s))$ con $|\delta(s)| \leq K$. Poniamo $CB(\bar{\omega}) := \pi^{-1}\sqrt{2} \nu(Q^h) C_F K e^{\pi\bar{\omega}/2}$, con $\nu(Q^h)$ indice di condizionamento assoluto di Q^h e $C_F = \int_0^{+\infty} |F(s)|(\pi s)^{-1/2} ds$. Utilizzando le precedenti convenzioni si dimostra il seguente risultato che fornisce una stima per l'errore globale:

TEOREMA 1. – *Definita la funzione*

$$\Psi(\bar{\omega}) := TB(\bar{\omega}) + CB(\bar{\omega})$$

per l'errore globale si ha

$$|GE_{\bar{\omega}}(t)| \leq t^{-1/2} \{ \Psi(\bar{\omega}) + O(h^{k+1}) \} \quad \forall t, \bar{\omega} > 0.$$

La stima fornita è in effetti una stima calcolabile dell'errore globale, in quanto i parametri $C_1, C_2, \nu(Q^h), C_F$ e K , che caratterizzano $TB(\bar{\omega})$, $CB(\bar{\omega})$ e $\Psi(\bar{\omega})$, sono ottenuti numericamente a partire da (pochi) valori calcolati per i coefficienti $c^\pm(\omega)$. Inoltre tale stima è posta alla base per determinare la *soluzione numerica regolarizzata*. Infatti, osservato che $\Psi(\bar{\omega})$ è funzione convessa di $\bar{\omega}$, e posto

$$\widetilde{\omega_{opt}} = \operatorname{argmin}_{\omega > 0} \Psi(\bar{\omega}),$$

risulta

$$\Phi_{\widetilde{\omega_{opt}}} \sim [F, f] = \|\sqrt{t} GE_{\widetilde{\omega_{opt}}}(t)\|_\infty \leq \Psi(\widetilde{\omega_{opt}}) + O(h^{k+1}).$$

Ovvero $f_{\widetilde{\omega_{opt}}} \sim$ può essere considerata una approssimazione *affidabile* della soluzione numerica regolarizzata $f_{\omega_{opt}}$. La parte conclusiva della tesi riguarda gli aspetti computazionali legati alla determinazione numerica dei parametri presenti nelle stime calcolabili. Qui sono infine eseguiti numerosi test volti a mostrare l'affidabilità dello schema numerico proposto nel predire il comportamento dei risultati in funzione della propagazione degli errori, ed in particolare nel fornire con la prefissata accuratezza i risultati.

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. C. HANSEN, *Numerical tools for analysis and solution of Fredholm integral equations of the first kind*, Inverse Problems, 8 (1992), 849-872.
- [2] V. A. MOROZOV *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*, Springer - Verlag (1984).
- [3] A. N. TIKHONOV, V. ARSENINE, *Methodes de resolution de problemes mal poses*, Editions MIR - Moscow (1974).
- [4] J.G. WHIRTER, E.R. PIKE, *Laplace transform and other similar Fredholm integral equations of the first kind*, Journal of Physics - A: Mathematical and General, 11 (1978), 1729-1745.

Dipartimento di Scienze Applicate, Università degli Studi di Napoli "Parthenope"

e-mail: ardelio.galletti@uniparthenope.it

Dottorato in Scienze Matematiche

(sede amministrativa: Università di Napoli Federico II) - Ciclo XVII

Direttore di ricerca: Prof. Almerico Murli, Università degli Studi di Napoli "Federico II"