*La Matematica nella Società e nella Cultura*

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Francesco Ciraulo

# Soddisfacibilità costruttiva

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 275–278.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_275_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 275-278

# Soddisfacibilità costruttiva

FRANCESCO CIRAULO

## 1. – Introduzione.

Uno dei problemi classici della Logica Matematica è quello di decidere la soddisfacibilità di una data formula. Per avere un'idea dell'importanza di tale questione basta ricordare che, nel caso della logica proposizionale classica, tale problema risulta NP-completo.

Nella presente tesi si intraprende uno studio della nozione di soddisfacibilità nel caso della logica intuizionistica del primo ordine. La particolarità e l'originalità di tale lavoro risiede sia nel fatto di considerare la logica intuizionistica invece di quella classica, sia nell'adoperare soltanto metodi costruttivi, da cui il titolo della tesi. In altre parole, la logica intuizionistica rappresenta sia l'oggetto che lo strumento di tale indagine.

Di solito, una formula viene classificata come soddisfacibile se è possibile trovarne un modello, cioè un'interpretazione che la renda vera. Nel caso della logica classica, sia proposizionale che del primo ordine, il teorema di completezza di Gödel, nell'ambito di un metalinguaggio classico, ci assicura che le formule soddisfacibili sono esattamente quelle non-contraddittorie, quelle, cioè, da cui non è possibile derivare il falso. Un'analisi di tale equivalenza, mostra che per provare che ogni formula non-contraddittoria ammette un modello occorre usare metodi non costruttivi come il Lemma di Zorn.

Nel caso in cui si adotti un metalinguaggio intuizionistico e costruttivo, invece, bisogna distinguere la nozione di soddisfacibilità da quella di non-contraddittorietà. In particolare, quest'ultima nozione, avendo un carattere negativo, deve essere rimpiazzata da un'altra, che nella tesi è chiamata "soddisfacibilità sintattica", che, comunque, risulta equivalente alla non-contraddittorietà nel caso si adotti un metalinguaggio classico.

Parallelamente, si può notare che la nozione classica di soddisfacibilità, essendo definita a partire dai modelli, risulta impossibile da gestire in maniera totalmente costruttiva. Pertanto, nella tesi è stata introdotta anche una nozione di "soddisfacibilità semantica", anche questa equivalente alla solita da un punto di vista classico.

Con tali strumenti è stato possibile provare, usando metodi co-induttivi, l'equivalenza fra le due nozioni di soddisfacibilità, quella sintattica e quella semantica. Da tale risultato, assumendo una fondazione classica, si ritrova il noto risultato di Gödel citato sopra.

Come applicazione, è stato provato costruttivamente un risultato di completezza nell'ambito delle logiche temporali intuizionistiche.

## 2. – Logica intuizionistica e topologia.

Uno stretto legame intercorre fra la topologia e la logica intuizionistica. In particolare, si sa che la classe degli spazi topologici fornisce una semantica completa per la logica intuizionistica del primo ordine. Quest'ultimo risultato può essere provato in maniera costruttiva (vedi [3]) a patto che si adotti la cosiddetta "topologia formale". Una *topologia formale* è una struttura $(S, \lhd, \ltimes)$ dove $S$ è un insieme (intuitivamente, la base di uno spazio topologico) mentre $\lhd$ e $\ltimes$ sono due relazioni fra elementi e sottoinsiemi di $S$ soddisfacenti ben determinate condizioni (vedi, per esempio, [4]). Dati $a \in S$ e $U \subseteq S$, $a \lhd U$ formalizza la relazione "l'aperto di base $a$ è contenuto nell'unione degli aperti di base di $U$", mentre $a \ltimes U$ rappresenta l'esistenza di un punto in $a$ i cui intorni di base sono tutti elementi di $U$. La relazione $\lhd$ (nota in letteratura con il nome di "copertura") è ampiamente usata nei vari approcci alla geometria senza punti (come, ad esempio, la teoria dei "locale"). Al contrario, la relazione $\ltimes$, recentemente introdotta da Sambin, trova nella presente tesi una delle sue prime applicazioni.

La versione costruttiva del teorema di completezza per la logica intuizionistica rispetto alle topologie formali è ottenuta dotando l'insieme delle formule Frm di una struttura di topologia formale (modello canonico; vedi [1]). È da notare che tale costruzione avviene combinando metodi induttivi (per $\lhd$) e co-induttivi (per $\ltimes$).

Tenendo presente che i punti della topologia canonica sono in corrispondenza con gli Henkin sets (vedi [1]), cioè con i modelli, si può intuire che la scrittura $\varphi \ltimes \mathrm{Frm}$ rappresenta formalmente l'esistenza di un modello per la formula $\varphi$. Questo ci ha suggerito di dare la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1. – *Una formula $\varphi$ in un linguaggio al primo ordine si dice "semanticamente soddisfacibile" se la condizione*

$$\varphi \ltimes \mathrm{Frm} \tag{1}$$

*risulta vera (nella topologia canonica).*

Si può dimostrare che la condizione 1 è equivalente all'esistenza di un'interpretazione (cioè una topologia formale $(S, \lhd, \ltimes)$ e una funzione di valutazione $V$) tale che $V(\varphi) \ltimes S$.

## 3. – Soddisfacibilità sintattica.

Come anticipato nell'introduzione, il passo successivo è stato quello di introdurre una versione positiva del concetto di non-contraddittorietà. Date due liste finite di formule, diciamo $\Gamma$ e $\Delta$, abbiamo introdotto il simbolo $\Gamma \veebar \Delta$ per rappresentare la non-contraddittorietà della teoria $\Gamma \cup \Delta$. Formalmente, la relazione $\Gamma \veebar \Delta$ è definita come la più grande che soddisfa certe regole, quindi in maniera co-induttiva. Questa situazione risulta perfettamente duale rispetto al caso della relazione di deducibilità $\vdash$ che è solitamente definita in maniera induttiva tramite ben precise regole di deduzione (vedi, ad esempio, il calcolo dei sequenti di Gentzen presentato in [5]).

A scopo di esempio riportiamo una delle regole più significative, quella che definisce il comportamento di $\veebar$ rispetto al quantificatore esistenziale:

$$\frac{\exists x\, \varphi(x) \veebar \Gamma}{\varphi(x) \veebar \Gamma} (x \text{ non libera in } \Gamma)\ .$$

Intuitivamente, tale regola afferma che a partire da un modello di $\Gamma$ ed $\exists x\, \varphi(x)$ è possibile costruire un modello per $\Gamma$ e per la formula aperta $\varphi(x)$ (a condizione che la variabile $x$ non appaia libera in $\Gamma$). Da un punto di vista classico, questo equivale a dire che $\Gamma \nvdash \neg \exists x\, \varphi(x)$ implica $\Gamma \nvdash \neg \varphi(x)$, cioè che $\Gamma \vdash \neg \varphi(x)$ implica $\Gamma \vdash \neg \exists x\, \varphi(x)$; e questo, a sua volta, usando le opportune equivalenze, non è altro che la regola di $\forall$-introduzione.

A chiudere il cerchio c'è una regola che lega le due nozioni sintattiche: la relazione di soddisfacibilità sintattica $\veebar$ e quella di deducibilità $\vdash$:

$$\frac{\Gamma \veebar \Delta \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\varphi \veebar \Delta}\ .$$

DEFINIZIONE 2. – *Una formula $\varphi$ è sintatticamente soddisfacibile se $\varphi \veebar \varphi$.*

Come già annunciato, siamo stati in grado di provare l'equivalenza fra le due nozioni, semantica e sintattica, di soddisfacibilità.

TEOREMA 1. – *Per ogni formula $\varphi$, sono equivalenti:*

1. *$\varphi$ è semanticamente soddisfacibile;*
2. *$\varphi$ è sintatticamente soddisfacibile.*

DIMOSTRAZIONE. – Tramite l'uso sostanziale di metodi co-induttivi. □

## 4. – Un'applicazione alle logiche temporali.

Un'applicazione di tale analisi costruttiva del concetto di soddisfacibilità è stata la possibilità di provare in maniera costruttiva un risultato di completezza per una particolare logica temporale intuizionistica. In sostanza, la presenza della relazione meta-linguistica $\veebar$ permette di descrivere in maniera naturale il legame fra le due modalità di possibilità nel futuro $\Diamond$ e nel passato $\blacklozenge$. Infatti, date due formule $\varphi$ e $\psi$, ci si convince facilmente che è naturale richiedere l'equivalenza:

$$\Diamond \varphi \veebar \psi \quad \text{se e solo se} \quad \varphi \veebar \blacklozenge \psi \ .$$

Tale condizione risulta classicamente equivalente ad una data da Jonsson e Tarski in [2] ed usata nella semantica per le logiche temporali basata sulle algebre bi-modali.

## BIBLIOGRAFIA


[1] COQUAND T., SADOCCO S., SAMBIN G. and SMITH J., *Formal topologies on the set of first-order formulae*, Journal of Symbolic Logic, **65** (2000), 1183-1192.

[2] JONSSON B. and TARSKI A., *Boolean algebras with operators. Part I*, American Journal of Mathematics, **73** (4) (1951), 891-939.

[3] SAMBIN G., *Pretopologies and completeness proofs*, Journal of Symbolic Logic, **60** (1995), 861-878.

[4] SAMBIN G., *The Basic Picture. A Structural Basis for Constructive Topology (including two papers with P. Martin-Lof and with V. Capretta)*, Oxford University Press, to appear in 2008.

[5] TAKEUTI G., *Proof Theory*, North-Holland (1975).



Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università degli Studi di Palermo
e-mail: ciraulo@math.unipa.it
Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amministrativa: Università di Palermo) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Giovanni Sambin, Università degli Studi di Padova