
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANDREA CERRI

Stabilità ed aspetti computazionali nella teoria della taglia multidimensionale

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1 (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 271–274.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_271_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_271_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Stabilità ed aspetti computazionali nella teoria della taglia multidimensionale

ANDREA CERRI

Il confronto tra forme è uno dei problemi centrali in Computer Vision ed in Pattern Recognition. Recentemente si è sviluppato un interesse crescente attorno a queste tematiche, e molti sforzi sono stati fatti per sviluppare modelli matematici adatti a questo genere di applicazioni. In un tale contesto, la Teoria della Taglia fu proposta negli anni '90 come approccio di carattere geometrico/topologico al problema del riconoscimento tra forme. L'idea di base è quella di ricondurre il confronto tra due oggetti appartenenti ad un database, (ad esempio, modelli 3D, immagini o suoni) a quello tra due opportuni spazi topologici $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ (di Hausdorff, non vuoti, compatti e localmente connessi), dotati di due funzioni continue $\vec{\varphi} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\vec{\psi} : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}^k$, selezionate conformemente all'applicazione in esame. Tali funzioni sono chiamate *funzioni misuranti*, e possono essere viste come i descrittori delle proprietà ritenute determinanti per il confronto. Le coppie del tipo $(\mathcal{M}, \vec{\varphi})$, $(\mathcal{N}, \vec{\psi})$ sono dette *coppie di taglia* e sono quindi una rappresentazione delle forme considerate, rispetto alle proprietà espresse dalle funzioni misuranti: in Teoria della Taglia, tali coppie possono essere studiate per mezzo delle *funzioni di taglia*, descrittori che permettono di rappresentare *quantitativamente* le caratteristiche *qualitative* di una forma (si veda [1, 2]). L'idea è associare ad ogni coppia di taglia $(\mathcal{M}, \vec{\varphi})$ una funzione $\ell_{(\mathcal{M}, \vec{\varphi})}$ che descriva i cambiamenti topologici del sottolivello $\mathcal{M}(\vec{\varphi} \preceq \vec{t}) = \{P \in \mathcal{M} : \varphi_i(P) \leq t_i, i = 1, \dots, k\}$ al variare di $\vec{t} = (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$:

DEFINIZIONE 1. – Sia $(\mathcal{M}, \vec{\varphi})$ una coppia di taglia. La funzione di taglia associata a $(\mathcal{M}, \vec{\varphi})$ è la funzione $\ell_{(\mathcal{M}, \vec{\varphi})} : \{\vec{x}, \vec{y}\} \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k : x_i < y_i, i = 1, \dots, k\} \rightarrow \mathbb{N}$ definita ponendo $\ell_{(\mathcal{M}, \vec{\varphi})}(\vec{x}, \vec{y})$ uguale al numero di componenti connesse del sottolivello $\mathcal{M}(\vec{\varphi} \preceq \vec{y})$ che contengono almeno un punto di $\mathcal{M}(\vec{\varphi} \preceq \vec{x})$.

Per rendere più chiara la definizione 2, in figura 1 è proposto un esempio di funzione di taglia 1-dimensionale (1D), associata cioè ad una funzione misurante a valori in $\mathbb{R}$ (i simboli $\vec{\varphi}, \vec{x}, \vec{y}$ sono stati sostituiti rispettivamente con φ, x, y). Lo spazio topologico $\mathcal{M}$ considerato è una curva chiusa, su cui è definita la funzione misurante $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ che manda ogni punto $Q \in \mathcal{M}$ nella sua distanza euclidea da P . La funzione di taglia $\ell_{(\mathcal{M}, \varphi)}$ associata alla coppia di taglia $(\mathcal{M}, \varphi)$ è rappresentata sulla destra: nel caso 1D, il dominio di definizione è $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$. Si dimostra [5] che le funzioni di taglia 1D sono esprimibili come combinazioni lineari (con coefficienti nei naturali) di funzioni caratteristiche associate a regioni limitate del dominio del tipo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < y < b\}$, ed illimitate del tipo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : k < x < y\}$: da questa osservazione segue che si può rappresentare ogni funzione di taglia 1D in

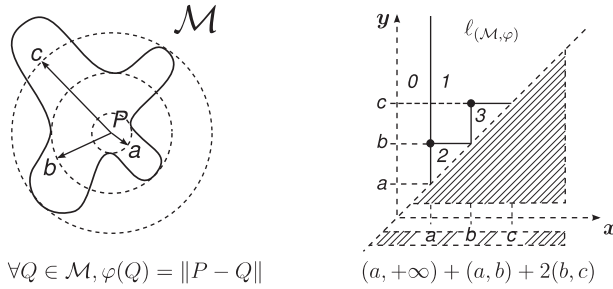


Fig. 1.

maniera compatta, per mezzo di una serie formale ottenuta associando ad una regione del tipo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < y < b\}$ il punto (a, b) , e ad una regione del tipo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : k < x < y\}$ il punto all'infinito $(k, +\infty)$ [5]. Utilizzando il linguaggio delle funzioni di taglia 1D, il problema intrinsecamente difficile di confrontare due forme potrà quindi essere tradotto in quello più semplice di confrontare serie formali di punti: a tale scopo, è stata introdotta la *distanza di matching* d_{match} tra funzioni di taglia 1D per misurare il “costo” necessario a trasportare i punti di una serie formale in quelli di un'altra [4]. Tale distanza è stabile rispetto a perturbazioni delle funzioni misuranti, e risulta quindi particolarmente adatta per le applicazioni.

1. – Presentazione del problema e risultati ottenuti.

Sin dalla loro introduzione, le funzioni di taglia sono state studiate ed applicate a problemi di riconoscimento di forma nella loro versione 1D. Tuttavia, la natura delle informazioni da trattare, per un generico problema in questo campo di applicazione, è di carattere multidimensionale: tale affermazione risulta ovvia se si osserva che, effettivamente, non tutte le proprietà di una forma sono esprimibili attraverso un unico valore reale (si pensi, ad esempio, alla rappresentazione del colore nel modello RGB). In termini di teoria della taglia, questo induce a considerare funzioni di taglia *k-dimensional* (*kD*), associate cioè a funzioni misuranti a valori in $\mathbb{R}^k$.

Questo lavoro di tesi affronta alcune questioni connesse allo studio delle funzioni di taglia *k-dimensional*: come possiamo rappresentarle in maniera compatta? Una tale rappresentazione è stabile rispetto alle perturbazioni? È possibile calcolare le funzioni di taglia *k-dimensional* con un metodo computazionalmente efficiente? I risultati ottenuti (si veda anche [1, 3]) vogliono rispondere a queste domande.

Il risultato principale di questo lavoro di tesi è che in ambito multidimensionale il confronto tra funzioni di taglia può essere ricondotto al caso $k = 1$ per mezzo di un opportuno cambiamento di variabili. L'idea è mostrare che, data una foliazione in semipiani del dominio di definizione $\{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k : x_i < y_i, i = 1, \dots, k\}$, la restrizione di una funzione di taglia *kD* su ognuno di tali semipiani risulta essere una funzione di taglia 1D.

DEFINIZIONE 2. – Per ogni vettore unitario $\vec{l} = (l_1, \dots, l_k)$ di $\mathbb{R}^k$ tale che $l_i > 0$ per $i = 1, \dots, k$, e per ogni vettore $\vec{b} = (b_1, \dots, b_k)$ di $\mathbb{R}^k$ tale che $\sum_{i=1}^k b_i = 0$, diremo che la

coppia $(\vec{l}, \vec{b})$ è ammissibile. Denotiamo l'insieme di tutte le coppie ammissibili di $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ con Adm_k . Data una coppia ammissibile $(\vec{l}, \vec{b}) \in \text{Adm}_k$, definiamo il semipiano $\pi_{(\vec{l}, \vec{b})}$ di $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ con le seguenti equazioni parametriche: $\vec{x} = s\vec{l} + \vec{b}$, $\vec{y} = t\vec{l} + \vec{b}$, per $s, t \in \mathbb{R}$, con $s < t$.

Il teorema seguente prova la riduzione al caso 1D.

TEOREMA 1. – Sia $(\vec{l}, \vec{b})$ una coppia ammissibile, e sia $F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\varphi}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\varphi}}(P) = \max_{i=1, \dots, k} \{(\varphi_i(P) - b_i)/l_i\}$. Allora, per ogni $(\vec{x}, \vec{y}) = (s\vec{l} + \vec{b}, t\vec{l} + \vec{b}) \in \pi_{(\vec{l}, \vec{b})}$ vale la seguente uguaglianza: $\ell_{(\mathcal{M}, \vec{\varphi})}(\vec{x}, \vec{y}) = \ell_{(\mathcal{M}, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\varphi}})}(s, t)$.

Il teorema 1 implica che ogni funzione di taglia associata ad una funzione misurante a valori in $\mathbb{R}^k$ può essere descritta in maniera compatta e completa tramite una famiglia parametrica di descrittori discreti: questa affermazione segue dal fatto che, data una funzione di taglia kD , ogni sua restrizione sui semipiani della foliazione risulta essere una funzione di taglia 1D, ed è dunque rappresentabile per mezzo di una serie formale. Una importante conseguenza è la stabilità di questo nuovo descrittore rispetto a perturbazioni delle funzioni misuranti

PROPOSIZIONE 1. – Se $(\mathcal{M}, \vec{\varphi}), (\mathcal{M}, \vec{\chi})$ sono coppie di taglia e $\max_{P \in \mathcal{M}} \|\vec{\varphi}(P) - \vec{\chi}(P)\|_{\infty} \leq \varepsilon$, allora per ogni coppia ammissibile $(\vec{l}, \vec{b})$, vale che $d_{\text{match}}\left(\ell_{(\mathcal{M}, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\varphi}})}, \ell_{(\mathcal{M}, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\chi}})}\right) \leq \varepsilon / \left(\min_{i=1, \dots, k} l_i\right)$, dove d_{match} è la distanza di matching tra funzioni di taglia 1D.

In maniera analoga si mostra la stabilità rispetto a perturbazioni nella scelta dei semipiani della foliazione. I risultati di stabilità permettono di definire una nuova distanza tra funzioni di taglia kD , resistente a perturbazioni delle funzioni misuranti.

DEFINIZIONE 3. – Siano $(\mathcal{M}, \vec{\varphi})$ e $(\mathcal{N}, \vec{\psi})$ due coppie di taglia. Chiamiamo distanza di matching multidimensionale la distanza definita ponendo

$$D_{\text{match}}(\ell_{(\mathcal{M}, \vec{\varphi})}, \ell_{(\mathcal{N}, \vec{\psi})}) = \sup_{(\vec{l}, \vec{b}) \in \text{Adm}_k} \min_{i=1, \dots, k} l_i \cdot d_{\text{match}}\left(\ell_{(\mathcal{M}, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\varphi}})}, \ell_{(\mathcal{N}, F_{(\vec{l}, \vec{b})}^{\vec{\psi}})}\right).$$

I risultati presentati aprono la strada all'utilizzo delle funzioni di taglia kD nelle applicazioni: a tale scopo, una parte di questo lavoro di tesi affronta alcuni aspetti computazionali riguardanti la controparte discreta delle funzioni di taglia kD . In questo caso una forma è rappresentata da una coppia $(G, \vec{\varphi})$, dove G è un grafo i cui vertici sono etichettati da valori della funzione misurante $\vec{\varphi}$. Una tale coppia viene detta *grafo di taglia*, e vuole essere una possibile discretizzazione di una data coppia di taglia. In generale, nelle applicazioni si è soliti dover maneggiare grafi di taglia con un numero elevato di vertici: è importante, quindi, disporre di un algoritmo che riduca un grafo di taglia senza mutare l'informazione che esso contiene in termini di funzioni di taglia. In questo senso, è stata sviluppata una procedura algoritmica, denominata *$\mathcal{L}$ -riduzione*, in grado di eliminare tutti quei vertici che non contengono informazione

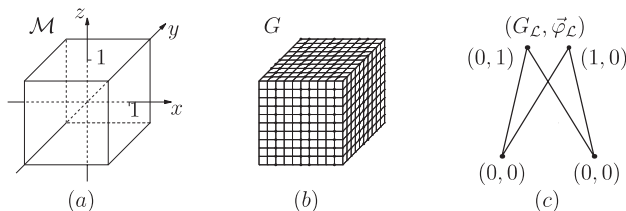


Fig. 2.

“significativa”: in effetti, dato che le funzioni di taglia contano componenti connesse, saremo interessati a localizzare i vertici che rappresentano la “nascita” di nuove componenti connesse o la “fusione” di componenti connesse già esistenti. In figura 2 è fornito un esempio di $\mathcal{L}$ -riduzione applicata ad un grafo di taglia $(G, \vec{\varphi})$.

In $\mathbb{R}^3$ consideriamo l'insieme $Q = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. Sia $\vec{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione continua definita come $\vec{\Phi}(x, y, z) = (|x|, |z|)$. Poniamo allora $\mathcal{M} = \partial Q$ (figura 2(a)) e $\vec{\varphi} = \vec{\Phi}|_{\mathcal{M}}$. Figura 2(b) mostra una possibile discretizzazione G di $\mathcal{M}$. In figura 2(c) è rappresentata una $\mathcal{L}$ -riduzione di $(G, \vec{\varphi})$, caratterizzata da una consistente diminuzione nel numero di vertici.

Il seguente teorema ci permette di calcolare la funzione di taglia kD di un grafo di taglia $(G, \vec{\varphi})$ direttamente da una sua $\mathcal{L}$ -riduzione $(G_L, \vec{\varphi}_L)$.

TEOREMA 2. – Per ogni $(\vec{x}, \vec{y}) \in \{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k : x_i < y_i, i = 1, \dots, k\}$, vale l'uguaglianza $\ell_{(G, \vec{\varphi})}(\vec{x}, \vec{y}) = \ell_{(G_L, \vec{\varphi}_L)}(\vec{x}, \vec{y})$.

Il teorema 2 implica un calcolo più rapido per $\ell_{(G, \vec{\varphi})}$, dato che una $\mathcal{L}$ -riduzione di $(G, \vec{\varphi})$ fornisce una diminuzione nel numero di vertici, preservando la stessa informazione in termini di funzione di taglia kD .

BIBLIOGRAFIA

- [1] BIASOTTI S., CERRI A., FROSINI P., GIORGI D. and LANDI C., *Multidimensional size functions for shape comparison*, Journal of Mathematical Imaging and Vision, in stampa.
- [2] BIASOTTI S., De FLORIANI L., FALCIDIENO B., FROSINI P., GIORGI D., LANDI C., PAPALEO L. and SPAGNUOLO M., *Describing shapes by geometrical- topological properties of real functions*, ACM Computing Surveys, in stampa.
- [3] CERRI A., FROSINI P. and LANDI C., *A global reduction method for multidimensional size graphs*, Electronic Notes in Discrete Mathematics, **26** (2006), 21-28.
- [4] d'AMICO M., FROSINI P. and LANDI C., *Natural pseudo-distance and optimal matching between reduced size functions*, Tech. Rept., DISMI, Univ. degli Studi di Modena e Reggio Emilia, **6** (2005).
- [5] FROSINI P. and LANDI C., *Size Functions and formal series*, Applicable Algebra in Engineering Communication and Computing, **12** (2001), 327-349.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: cerri@dm.unibo.it

Dottorato di Ricerca in Matematica

(sede amministrativa: Università di Bologna) - Ciclo XIX

Direttore di Ricerca: Dr. Patrizio Frosini, Università di Bologna