La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Rosanna Campagna

Il calcolo numerico dell'antitrasformata di Laplace in presenza di dati discreti

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 263–266.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_263_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 263-266

Il calcolo numerico dell'antitrasformata di Laplace in presenza di dati discreti

Rosanna Campagna

1. – Introduzione.

La presente Nota riassume il lavoro di tesi di dottorato in Scienze Matematiche rivolto allo studio ed all'analisi del problema di inversione numerica della funzione trasformata di Laplace, calcolabile su un insieme finito e preassegnato di valori (arbitrario in numero, tipologia e distribuzione), appartenenti alla sua regione di convergenza. Il problema in esame è riferito, in letteratura, come *problema inverso con "dati discreti"* e si colloca nell'ambito della risoluzione numerica di problemi inversi mal-posti. Risale al 1956 [3] uno dei primi lavori sul calcolo numerico dell'antitrasformata di Laplace. In esso, però, come nella quasi totalità dei lavori dedicati al problema, si assume che sia nota l'espressione della trasformata. In effetti, metodi, algoritmi e software dedicati al calcolo numerico della funzione antitrasformata, richiedono che la trasformata sia calcolabile, *ovunque sia necessario*, nella sua regione di convergenza.

2. – Contributi.

L'idea, sulla base della quale si articola il lavoro, consiste nel *sostituire ai dati una funzione* $\tilde{F}$ che, realizzando il *fitting dei valori della trasformata*, descriva la funzione che li ha generati in tutta la sua regione di convergenza. Il lavoro si articola, essenzialmente, in due fasi:

Fase 1 definire un modello per l'*approssimazione numerica dei dati.*

Fase 2 Realizzare il *calcolo numerico dell'antitrasformata* di Laplace.

Per soddisfare la prima fase è stato formulato il seguente modello:

Definizione 1 [Fitting di valori di una Trasformata di Laplace]. – *Assegnati i punti del piano* $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *tali che* $y_i = F(x_i)$, $\quad i = 1, \ldots, n$, *con* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *trasformata di Laplace incognita, sia:*

$$sw_F(s) = \sum_{i=1}^{n} w_i [y_i - s(x_i)]^2 + \rho \int_{x_1}^{+\infty} |x \cdot s(x)| dx$$

con ρ *costante positiva,* $w_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, *pesi assegnati e* $K = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1}\}$, *dove* $x_0 = a_f$, *ascissa di convergenza della trasformata* *di Laplace e* $x_{n+1} = +\infty$, *si cerca una funzione definita in* $[x_1, +\infty)$ *ed ivi continua con derivata prima continua,* $\overline{s} \in C^1((x_1, +\infty))$, *tale che*

$$\overline{s} = \underset{s \in \mathcal{F}}{arg\ min}\ sw_F(s),$$

con (1) $\mathcal{F} = \big\{g \in C^1((x_1, +\infty))\ t.c.\ g \in S_3(K) \cap L^1([x_n, +\infty))\big\}$.

Partendo dal problema di fitting, combinando le proprietà delle funzioni spline [1, 4] con quelle che caratterizzano l'andamento asintotico (all'infinito) di una trasformata, è stata definita una funzione *interpolante i campioni*, attraverso la seguente:

Definizione 2. – *Siano assegnati i punti del piano* $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *tali che* $y_i = F(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *con* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *trasformata di Laplace* incognita. *Sia* $K = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1}\}$, *con* $x_0 = a_f < x_1$ *e* $x_{n+1} = +\infty$, *con* a_f *ascissa di convergenza di F. Definiamo* s_{Lt} *la* spline generalizzata *sull'insieme dei nodi K, che sia* interpolante*:* $s_{Lt}(x_i) = y_i = F(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$ *e tale che* $s_{Lt}(x) = s_1(x) + s_2(x)$ *con* s_1 *spline polinomiale di grado* 3 *su K*

$$s_1(x) = p(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i (x - x_i)^3_+, \qquad p \in \Pi_3 \ \Rightarrow\ p(x) = \sum_{k=0}^{3} b_k x^k, \quad x \in [x_1, x_n]$$

e

$$s_2(x) = \beta\, \frac{e^{-x}}{x}, \quad x \in [x_n, +\infty)$$

Sia, inoltre, $s_{Lt} \in C^3((x_1, x_3))$ *e* $C^1((x_1, +\infty))$, *ovvero la spline generalizzata goda di continuità della derivata prima nel punto di raccordo tra* s_1 *e* s_2.

Nel lavoro di tesi è stato provato che *esiste ed è unica* la funzione che risolve il *problema di fitting*, ovvero che appartiene allo spazio $\mathcal{F}$ e rende minimo il funzionale $sw_F(s)$. Tale spline è proprio la *spline generalizzata* s_{Lt}. È stato dimostrato il seguente:

Teorema 1 [Esistenza ed unicità della spline che risolve il problema di fitting di valori di una Trasformata di Laplace]. – *Siano assegnati i punti del piano* $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *tali che* $y_i = F(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *con* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *trasformata di Laplace* incognita, *sia:*

$$sw_F(s) = \sum_{i=1}^{n} w_i [y_i - s(x_i)]^2 + \rho \int_{x_1}^{+\infty} |x \cdot s(x)| dx$$

(1) Con $S_3(K)$ si fa riferimento all'insieme delle spline cubiche sull'insieme dei nodi K.

con ρ *costante positiva,* $w_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, *pesi assegnati e* $K = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1}\}$, *dove* $x_0 = a_f$, *ascissa di convergenza della trasformata di Laplace e* $x_{n+1} = +1\,\infty$, *sia* $n \geq 2$, *allora esiste un'unica spline che soddisfa la* Definizione 2 *sull'insieme dei nodi K, tale che*

$$sw_F(s_{Lt}) \leq sw_F(s), \qquad \forall\, s \in \mathcal{F};$$

l'uguaglianza sussiste se e solo se $s_{Lt} \equiv s$ *in* $[x_1, +\infty)$.

Il modello numerico formulato per la costruzione della spline generalizzata è un sistema di equazioni lineari. La scelta delle condizioni al contorno per la funzione s_{Lt} incide non solo sul suo andamento, in $(a_f, x_1]$ ed in $[x_n, +\infty)$, ma anche sul condizionamento della matrice dei coefficienti del metodo costruttivo.
Nel lavoro si accenna, anche, brevemente, ad alcune idee e spunti risolutivi volti alla formulazione di un modello analogo nel caso complesso.

I test eseguiti su svariate funzioni hanno riscontrato la maggiore accuratezza fornita nell'approssimazione della trasformata da parte della s_{Lt} rispetto alle *classiche* spline cubiche polinomiali interpolanti, *naturale*, *complete*, *not-a-knot* ed alla *smoothing spline*, misurata attraverso l'*errore di fitting*:

$$E_{fitting} = \max_{i=1,\ldots,nv} \{|F(z_i) - \tilde{s}(z_i)|\},$$

dove nv è il numero dei punti di valutazione della F e delle spline, in intervalli più o meno ampi dell'asse reale. In particolare, sebbene nell'intervallo definito dai campioni generati dalla trasformata le spline polinomiali forniscano un'accuratezza confrontabile con quella fornita della s_{Lt}, tuttavia l'errore di fitting cresce notevolmente nelle valutazioni esterne all'intervallo dei campioni e su intervalli di ampiezza sempre maggiore. Ad esempio, sia nota la funzione:

$$F(s) = atan(1/s), \tag{1}$$

la cui antitrasformata è $f(t) = \sin t/t$, in corrispondenza di $n = 10$ campioni; si riportano, in tabella, i valori dell'errore di fitting calcolato al variare di nv.

nv	s_{Lt}	*complete*	*not-a-knot*	*naturale*	*smoothing*
20	5.3935e-02	6.1202e-01	5.1728e-01	1.7969e+00	1.3960e+00
30	5.3935e-02	3.7884e+00	3.2550e+00	1.0461e+01	8.0341e+00
40	5.3935e-02	1.1766e+01	1.0180e+01	3.1601e+01	2.4193e+01

I valori in tabella confermano che le spline polinomiali si allontanano notevolmente dall'andamento della trasformata. In effetti, si può verificare che l'errore assoluto, commesso nell'approssimazione di F con s_{Lt}, raggiunge un massimo in un intorno del nodo x_n, mantenendosi, comunque, dell'ordine di 10^{-2}, per poi tendere a zero all'infinito.

È stato applicato, quindi, a s_{Lt}, un metodo [2] per l'inversione numerica della trasformata di Laplace nel caso reale, attraverso il quale sono state calcolate approssimazioni, $\tilde{f}$, “soddisfacenti” dell’antitrasformata, f. Nella tabella seguente si riportano l’errore di fitting e l’errore relativo su f, ottenuti utilizzando la spline s_{Lt} interpolante i valori della funzione F nella (1).

È opportuno notare che la perdita di accuratezza su f è dovuta al condizionamento del metodo numerico di inversione.

nv	$E_{fitting}$	$\dfrac{\Vert f(x) - \tilde{f}(x)\Vert_\infty}{\Vert f(x)\Vert_\infty}$
5	1.5340e-07	1.8388e-02
8	2.4878e-07	3.1569e-03
10	2.3547e-07	2.6264e-04
18	2.6079e-07	1.3592e-02

L’ultima parte del lavoro di tesi ha riguardato la sperimentazione su campioni derivanti da problemi applicativi; il metodo descritto è stato utilizzato su un insieme di dati derivanti da un problema di rilassamento energetico, che si manifesta in seguito all’applicazione della tecnica di risonanza magnetica nucleare (spettroscopia NMR); in esso si dispone di un campionamento finito di un segnale, dipendente dal tempo, che si esprime come trasformata di Laplace di una funzione densità di probabilità del tempo di rilassamento. La funzione che ha generato i campioni non è nota. In questi casi, nella costruzione dell’antitrasformata, nascono altre difficoltà legate non solo alla presenza del rumore che può contaminare i dati in maniera significativa, ma anche alla indeterminatezza della soluzione stessa. Solo attraverso l’uso di informazioni aggiuntive sui dati e/o sulla soluzione si può formulare un modello attendibile.

BIBLIOGRAFIA

[1] De Boor C., *A Practical Guide to Splines*, Springer-Verlag New York Inc. (1978).
[2] Giunta G., Murli A. and Schmid G., *An analysis of bilinear transform polynomial methods of inversion of Laplace transforms*, Numerische Mathematik, **69** (1995), 269-282.
[3] Papoulis A., *A new method of inversion of the Laplace Transform*, part of a paper presented at the Symposium on Modern Network Synthesis, Polytechnic Institute of Brooklyn (1955).
[4] Schumaker L. L., *Spline Functions: Basic Theory*, John Wiley & Sons, Inc., (1981).

Dipartimento di Matematica e Applicazioni “R. Caccioppoli”
Università degli Studi di Napoli Federico II
e-mail: rosanna.campagna@dma.unina.it
Dottorato in Scienze Matematiche
(sede amministrativa: Università di Napoli Federico II) - Ciclo XVIII
Direttore di ricerca: Prof. Almerico Murli, Università di Napoli Federico II