La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CHIARA BOTTERO

Studio qualitativo di due equazioni di evoluzione in ottica quantistica

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 259–262.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_259_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 259-262

Studio qualitativo di due equazioni di evoluzione in ottica quantistica

CHIARA BOTTERO

L'evoluzione irreversibile di un sistema quantistico aperto, cioè interagente con l'ambiente circostante, è descritta da un semigruppo dinamico quantistico, ovvero un semigruppo $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ di operatori completamente positivi sull'algebra $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ di tutti gli operatori limitati sullo spazio di Hilbert h del sistema stesso che conservano l'identità dell'algebra ($\mathcal{T}_t(1) = 1$ per ogni $t \geq 0$).

Introdotti in letteratura fisica negli anni Settanta, dal punto di vista matematico, i semigruppi dinamici quantistici agendo su un'algebra (non-commutativa) di operatori invece che su un'algebra (commutativa) di funzioni sono semplicemente una generalizzazione dei semigruppi markoviani classici. Per questa ragione li chiameremo semigruppi markoviani quantistici.

La proprietà più importante degli operatori $\mathcal{T}_t$ è la completa positività ovvero la positività della loro estensione canonica $\mathcal{T}_t \otimes \mathrm{Id}_n$ all'algebra $\mathcal{B}(\mathsf{h}) \otimes M_n(\mathbb{C})$ per ogni $n \geq 1$ ($M_n(\mathbb{C})$ sono le matrici complesse $n \times n$). Grazie a questa il generatore $\mathcal{L}$ di un semigruppo Markoviano quantistico continuo (nel tempo) in norma si rappresenta nella forma GKSL (Gorini,Kossakowski, Sudarshan, Lindblad)

$$\mathcal{L}(X) = i[H, X] - \frac{1}{2} \sum_{\ell} (L_\ell^* L_\ell x - 2L_\ell^* x L_\ell + x L_\ell^* L_\ell) \tag{1}$$

dove $H, L_k \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$, $H = H^*$, $[H, X] := HX - XH$ e la serie $\sum_{\ell} L_\ell^* L_\ell$ è fortemente convergente.

La rappresentazione (1) si estende in modo naturale al caso di generatori $\mathcal{L}$ illimitati. Gran parte della teoria relativa a questo strumento matematico innovativo è descritta in [1], [2], [3] e riferimenti ivi contenuti.

Lo scopo della mia tesi è stato quello di studiare l'applicazione di questo nuovo strumento a modelli concreti tratti dalla letteratura fisica. Mi sono occupata in particolar modo del fenomeno di ottica non lineare costituito dalla generazione di seconda armonica [4] e dello studio di un atomo a due livelli colpito da un fascio di luce compressa (*squeezed*) [5], in entrambi i casi presenza di rumore.

Sono partita dall'equazione di evoluzione che descrive il fenomeno, detta "Master Equation", e ho dimostrato, prima di tutto, esistenza e unicità della soluzione costruendo il semigruppo dimamico quantistico minimale associato a certi operatori L_k e H (illimitati) dedotti dalla "Master Equation" stessa. Questo passo è basato sulla dimostrazione preliminare che un'opportuna estensione dell'operatore $G = -\frac{1}{2}\sum_{\ell} L_{\ell}^{*}L_{\ell} - iH$ genera un semigruppo fortemente continuo sullo spazio di Hilbert h del sistema.

La dimostrazione dell'unicità della soluzione della "Master Equation", invece, è equivalente alla dimostrazione della Markovianità del semigruppo dinamico quantistico minimale, ovvero alla dimostrazione del fatto che questo conserva l'identità e dunque è un semigruppo markoviano quantistico.

Successivamente, per entrambi i fenomeni, dimostro l'esistenza di stati stazionari normali. La congettura naturale, suggerita da considerazioni fisiche, è che questi siano fedeli, ovvero con supporto uguale all'intero spazio h. Se cos fosse, per risultati generali, sarebbero unici e inoltre i rispettivi sistemi, partendo da uno stato normale qualunque evolverebbero, per tempi grandi verso i rispettivi stati invarianti.

La fedeltà degli stati invarianti segue dalla banalità dei sottospazi invarianti per gli operatori P_t del semigruppo fortemente continuo generato da G che, se contenuti nel dominio di G siano poi invarianti anche per gli operatori L_{ℓ}. Ho dimostrato, come passo preliminare, con l'obiettivo di realizzare questo programma, la compattezza del risolvente dell'operatore G.

Nell'equazione di evoluzione per la generazione di seconda armonica lo spazio di Hilbert considerato è $\mathsf{h} = \ell^2(\mathbb{N}) \otimes \ell^2(\mathbb{N})$ e l'operatore G si costruisce a partire dall'Hamiltoniana $iH = b\big(a_1^+ - a_1\big) + g\big(a_1^{+\,2}a_2 - a_1^2a_2^+\big)$ e dagli operatori $L_1 = a_1$, $L_2 = a_2$, dunque

$$G = -\frac{1}{2}(a_1^+a_1 + a_2^+a_2) - b\big(a_1^+ - a_1\big) - g\big(a_1^{+\,2}a_2 - a_1^2a_2^+\big)$$

con $b \in R$, ove a_1^+ e a_2^+ sono operatori di creazione, mentre a_1 ed a_2 sono operatori di annichilazione definiti da

$$\begin{aligned} a_1^+e_a &= \sqrt{a_1+1}\, e_{(a_1+1,a_2)}, \qquad & a_2^+e_a &= \sqrt{a_2+1}\, e_{(a_1,a_2+1)} \\ a_1e_a &= \sqrt{a_1}\, e_{(a_1-1,a_2)}, & a_2e_a &= \sqrt{a_2}\, e_{(a_1,a_2-1)} \end{aligned}$$

con $e_{(a_1,a_2)} = e_a$, $a \in \mathbb{N}^2$ base ortonormale canonica di h.

TEOREMA 1. – *La chiusura dell'operatore G definito come sopra sulle combinazioni lineari finite di elementi della base ortonormale canonica genera un semigruppo fortemente continuo di contrazioni su* h.

La dimostrazione di questo teorema è stata ottenuta con metodi perturbativi. Infatti non è difficile verificare che l'operatore con $b = 0$ lascia invarianti i sottospazi di h generati dai vettori $e_{(a_1,a_2)}$ con $a_1 + 2a_2 = n$ per ogni $n \geq 0$ fissato. Si prova quindi che tutti i vettori di questo tipo sono vettori analitici per l'operatore G_0 con $b = 0$ per il quale quindi vale la conclusione del teorema. Si verifica infine che il termine $b(a_1^+ - a_1)$ è una perturbazione relativamente limitata di G_0 con costante relativa minore di 1.

Il passo seguente è la dimostrazione della markovianità (e quindi dell'unicità). Trattandosi di un risultato di "non-esplosione" si utilizza un analogo operatoriale delle funzioni di Liapounov partendo dalla diseguaglianza algebrica formale $\mathcal{L}(C) \leq -c_1 C + c_2$ con C estensione autoaggiunta di $a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2$ e c_1, c_2 costanti positive.

TEOREMA 2. – *Il semigruppo dinamico quantistico minimale associato agli operatori G, L_1 ed L_2 è Markoviano.*

Successivamente, migliorando la diseguaglianza $\mathcal{L}(C) \leq -c_1 C + c_2$, con $\mathcal{L}(C) \leq -c_3 N + c_4 p$ con p proiezione di rango finito si ottiene il seguente.

TEOREMA 3. – *Il semigruppo Markoviano quantistico costruito a partire dagli operatori operatori G, L_1 ed L_2 ammette uno stato stazionario normale.*

Per concludere naturalmente lo studio del modello per la generazione di seconda armonica vorrei provare, infine che lo stato invariante è unico e che il sistema, partendo da uno stato qualsiasi converge verso lo stato invariante. Con questo scopo ho cercato di verificare che la banalità dei sottospazi invarianti menzionata qui sopra ma, purtroppo, sono riuscita solo a fare un primo passo mostrando che l'operatore G ha risolvente compatto. Per il momento, devo quindi limitarmi al seguente

TEOREMA 4. – *Il semigruppo markoviano quantistico costruito a partire dagli operatori G, L_1 ed L_2 ammette uno stato stazionario unico se ammette uno stato stazionario normale che sia anche fedele.*

La dimostrazione si basa sul fatto che l'algebra dei punti fissi del semigruppo markoviano quantistico che, per un risultato di Fagnola e Rebolledo, coincide con il commutatante generalizzato di $G, L_1, L_1^*, L_2, L_2^*$, è banale.

Per quanto riguarda invece lo studio di un atomo a due livelli colpito da un fascio di luce *squeezed*, consideriamo lo spazio di Hilbert $\mathsf{k} = \ell^2(\mathbb{N}) \otimes \mathbb{C}^2$. L'operatore G costruito a partire dall'Hamiltoniana $iH = \frac{1}{2}(Ea^{+2} - E^* a^2) + \frac{\eta\sqrt{k\gamma}}{2}(a\sigma^+ - a^+\sigma^-)$ e dagli operatori (ampliati naturalmente a k)

$$L_1 = \sqrt{\eta k}\, a + \sqrt{\eta\gamma}\, \sigma^- \qquad L_2 = \sqrt{(1-\eta)k}\, a \qquad L_3 = \sqrt{(1-\eta)\gamma}\, \sigma^-$$

risulta essere $G = -\frac{1}{2}ka^+a - \frac{1}{2}\gamma\sigma^+\sigma^- - \frac{1}{2}(Ea^{+2} - E^*a^2) - \eta\sqrt{k\gamma}\,\sigma^+ a$ con

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e dove k, γ ed η sono costanti reali positive ed $E \in \mathbb{C}$ è il campo elettrico.

Anche in questo caso si dimostrano i seguenti

TEOREMA 5. – *La chiusura dell'operatore G definito come sopra sul dominio $D = lin\{ e_a \}$, dove $a = (a_1, a_2)$ con $a_1 \in \mathbb{N}$, $a_2 \in \{+, -\}$ genera un semigruppo fortemente continuo di contrazioni su* k.

TEOREMA 6. – *Il semigruppo markoviano quantistico associato agli operatori G, L_1, L_2 è markoviano.*

Tenendo conto del fatto che la larghezza di banda del fascio di luce *antisqueezed* deve essere necessariamente positiva, ho poi trovato l'esistenza di uno stato stazionario normale nell'ipotesi $|E| < k/2$ attraverso il teorema seguente.

TEOREMA 7. – *Se $|E| < k/2$, il semigruppo markoviano quantistico associato agli operatori G, L_1, L_2 ammette uno stato stazionario normale.*

Ho inoltre dimostrato che, ipotizzando l'esistenza di uno stato invariante con $2|E| \geqslant k$, ovvero per campi forti, si troverebbe che $tr(\rho_t a^+ a)$ divergerebbe all'infinito al crescere del tempo t, situazione questa che sarebbe priva di senso fisico.

Per concludere dimostro i due teoremi seguenti.

TEOREMA 8. – *Se $|E| < \dfrac{k}{2}$ l'operatore G ha risolvente compatto.*

TEOREMA 9. – *Nell'ipotesi $2|E| < k$, il semigruppo markoviano quantistico associato agli operatori G, L_1, L_2 ed L_3 di un atomo a due livelli ammette uno stato stazionario. Se questo è anche fedele allora è unico ed è l'unico stato limite del sistema.*

BIBLIOGRAFIA

[1] S. ATTAL, A. JOYE, C.-A. PILLET (Eds.), *Open Quantum Systems* **I**, **II**, **III**. LNM 1880, 1881, 1882. Springer 2006.

[2] F. FAGNOLA, *Quantum Markov Semigroups and Quantum Flows*, Proyecciones, **18** (1999), 1-144.

[3] F. FAGNOLA, R. REBOLLEDO, *Transience and Recurrence of Quantum Markov Semigroups*, Probab. Theory Related Fields, **126** (2003), 289-306.

[4] N. GISIN, I.C. PERCIVAL, *The quantum state diffusion model applied to open systems*, J. Phys. A, 25, **21** (1992).

[5] D. A. RODRIGUES, J. IMBERS, A. D. ARMOUR, *Quantum dynamics of a resonator driven by a superconducting single electron transistor: a solid state analogue of the micromaser*, Physical Review Letters, **98** (2007).

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano
e-mail: chiara.bottero@polimi.it
Dottorato in Ingegneria Matematica (sede amministrativa: Politecnico di Milano) - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Prof. Franco Fagnola, Politecnico di Milano