
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUCA BISCONTI

Orbifolds autoduali di Einstein positive con gruppo di isometrie unidimensionale

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1 (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 255–258.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_255_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_255_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Orbifolds autoduali di Einstein positive con gruppo di isometrie unidimensionale

LUCA BISCONTI

In questa tesi costruiamo una nuova famiglia di orbifolds $\mathcal{O}^4(\Theta)$ compatte, autoduali di Einstein con curvatura scalare positiva $s > 0$ e con gruppo di isometrie unidimensionale. In particolare proviamo che questi esempi, generati dall'azione di $G := Sp(1) \times T_\Theta^3 \subset Sp(8)$ su $S^{31} \subset \mathbb{H}^8$, sono differenti da quelli descritti da Boyer, Galicki e Piccinni in [3] (indicheremo questi ultimi esempi con il simbolo $\mathcal{O}^4(\Omega)$). Per costruire la famiglia di orbifolds $\mathcal{O}^4(\Theta)$ utilizziamo il procedimento di riduzione quaternionale kähleriana sulla Grassmanniana $Gr_4(\mathbb{R}^8)$, per l'azione isometrica del gruppo $T_\Theta^3 \subset T^4 \subset SO(8)$, definita tramite l'azione di G su $S^{31} \subset \mathbb{H}^8$, essendo $\Theta \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Z})$ una matrice di pesi per l'azione.

Il punto di partenza è la costruzione dovuta a Kobak e Swann, cfr. [4], dove tramite l'azione di $U(1) \subset U(3) \subset SO(7)$ su $Gr_4(\mathbb{R}^7)$ si ottiene l'orbifold quaternionale kähleriana 8-dimensionale $\mathbb{Z}_3 \backslash G_2/SO(4)$. Azioni analoghe si hanno su qualsiasi Grassmanniana $Gr_4(\mathbb{R}^{n+1}) \cong SO(n+1)/SO(n-3) \times SO(4)$ ed affinché tramite riduzione quaternionale kähleriana si ottenga come quoziente un'orbifold $\mathcal{O}^4$ è necessario usare un toro T^{n-4} . Dato che il toro massimale di $SO(n+1)$ ha dimensione $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, per avere un'azione con pesi del toro T^{n-4} , deve valere che $n-4 < \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. Allora abbiamo:

$$n < 8 \text{ (} n \text{ pari)} \quad \text{oppure} \quad n < 9 \text{ (} n \text{ dispari)},$$

e quindi le uniche possibilità sono:

$$(1) \quad Gr_4(\mathbb{R}^6) \cong Gr_2(\mathbb{C}^4), \quad Gr_4(\mathbb{R}^7), \quad Gr_4(\mathbb{R}^8).$$

I primi due casi in (1) sono stati trattati rispettivamente in [2] e [3]. Nella tesi si considera invece il caso della Grassmanniana $Gr_4(\mathbb{R}^8)$, i cui quozienti per l'azione di tori T_Θ^3 abbiamo denotato con $\mathcal{O}^4(\Theta)$.

L'azione del gruppo G sulla sfera $S^{31} \subset \mathbb{H}^8$ è definita tramite $Sp(1)$ che agisce per moltiplicazione a sinistra, mentre $T_\Theta^3 \subset SO(8)$ agisce tramite le matrici:

$$(2) \quad A(\Theta) := \begin{pmatrix} A_1(t, s, r) & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & A_2(t, s, r) & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & A_3(t, s, r) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & A_4(t, s, r) \end{pmatrix} \in T^4,$$

dove

$$(3) \quad A_a(t, s, r) = \begin{pmatrix} \cos(p_a t + q_a s + l_a r) & \sin(p_a t + q_a s + l_a r) \\ -\sin(p_a t + q_a s + l_a r) & \cos(p_a t + q_a s + l_a r) \end{pmatrix},$$

con $t, s, r \in [0, 2\pi)$ e p_a, q_a, l_a coefficienti di Θ . Vale il seguente:

TEOREMA 1. — Sia $\Theta \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Z})$ tale che sia i minori 3×3 Δ_{aff} che gli interi $^{1+2}\square_{1\pm 3}^{1\pm 4} := \Delta_{123} \pm \Delta_{124} \pm \Delta_{134} \pm \Delta_{234}$ siano non nulli. Allora il quoziente quaternionale kähleriano dello spazio proiettivo quaternionale $\mathbb{H}P^7$ è un orbifold $\mathcal{O}^4(\Theta)$ compatta autoduale di Einstein con $s > 0$ e gruppo di isometrie unidimensionale.

Di fatto, sia il fibrato 3–Sasakiano $\mathcal{M}^7(\Theta)$ che lo spazio dei twistors $\mathcal{Z}^6(\Theta)$ hanno delle singolarità, ed esse passano al quoziente quaternionale kähleriano $\mathcal{O}^4(\Theta)$ cfr. 1. Sia $\mu : S^{31} \rightarrow \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{R}^3$ la mappa momento per l'azione di G su S^{31} , e definiamo $N(\Theta) := \mu^{-1}(0)$. Dallo studio di $\mathcal{M}^7(\Theta)$ abbiamo:

TEOREMA 2. — I punti singolari delle orbifolds 3–Sasakiane $\mathcal{M}^7(\Theta)$ provengono dagli strati singolari $\tilde{S}$ di $N(\Theta)$, ottenuti intersecando $N(\Theta)$ con i seguenti G –strati $\bar{S}$ per $\mathbb{H}^8$ (e quelli ottenuti scambiando (w'_{2a-1}, w'_{2a}) con (w''_{2a-1}, w''_{2a}) , $a = 1, 2, 3, 4$):

$$(i) \quad \bar{S}^{1234} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ w'_1 & w'_2 & w'_3 & w'_4 & w'_5 & w'_6 & w'_7 & w'_8 \end{array} \right) \right\},$$

$$(ii) \quad \bar{S}_4^{123} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ w'_1 & w'_2 & w'_3 & w'_4 & w'_5 & w'_6 & w''_7 & w''_8 \end{array} \right) \right\},$$

$$(iii) \quad \bar{S}_{34}^{12} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 & z_8 \\ w'_1 & w'_2 & w'_3 & w'_4 & w''_5 & w''_6 & w''_7 & w''_8 \end{array} \right) \right\},$$

dove

$$(w'_{2a-1}, w'_{2a}) := \frac{e^{i\delta}}{\sin \varphi} (-z_{2a} + iz_{2a-1} \cos \varphi, z_{2a-1} + iz_{2a} \cos \varphi),$$

e

$$(w''_{2a-1}, w''_{2a}) := \frac{e^{i\delta}}{\sin \varphi} (-z_{2a} - iz_{2a-1} \cos \varphi, z_{2a-1} - iz_{2a} \cos \varphi).$$

Ogni strato $\bar{S}$ genera un punto singolare $(\bar{S} \cap N(\Theta))/G \in \mathcal{M}^7(\Theta)$ la cui isotropia dipende solo da uno dei minori $^{1+2}\square_{1\pm 3}^{1\pm 4}$.

Nel seguente teorema indichiamo con $\tilde{G}$ il gruppo $G \times U(1)$, dove $U(1)$ agisce per moltiplicazione a destra sugli elementi di $S^{31} \subset \mathbb{H}^8$ e $\mathcal{Z}^6(\Theta) = N(\Theta)/\tilde{G}$. Denotiamo

con $\bar{S}$ e $\tilde{S}$ gli strati dell'azione di $\tilde{G}$ rispettivamente su $\mathbb{H}^8$ e su $N(\Theta) \subset \mathbb{H}^8$, e con $\bar{S}$ gli strati dell'azione di G su $\mathbb{H}^8$. Dallo studio di $\mathcal{Z}^6(\Theta)$ abbiamo:

TEOREMA 3. – *Sia $\mathcal{Z}^6(\Theta)$ lo spazio dei twistors di $\mathcal{O}^4(\Theta)$. Allora il luogo singolare $\Sigma(\Theta)$ di $\mathcal{Z}^6(\Theta)$ è costituito al più da:*

- (1) Una 2-sfera S^2 , la cui isotropia dipende solo da uno dei minori $1^{\pm 2} \square_{1\pm 3}^{1\pm 4}$.
- (2) Undici 2-sfere S^2 tra loro disgiunte, la cui isotropia dipende dai minori $\pm \Delta_{a\beta\gamma}$. Queste si ottengono come $\tilde{G}$ -quozienti a partire dagli strati di $\mathbb{H}^8$ (e quelli ottenuti scambiando (z_{2a-1}, z_{2a}) con (w_{2a-1}, w_{2a}) , $a = 1, 2, 3, 4$):

$$(i) \bar{S}_4^{123} := \tilde{G} \cdot \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_7 & w_8 \end{array} \right) \right\},$$

$$(ii) \bar{S}_{34}^{12} := \tilde{G} \cdot \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_5 & w_6 & w_7 & w_8 \end{array} \right) \right\}.$$

Per ogni $\tilde{G}$ -strato $\bar{S}_\delta^{a\beta\gamma}$ abbiamo che $\bar{S}_\delta^{a\beta\gamma} \cap N(\Theta)$ è costituito da due componenti connesse, mentre $\bar{S}_{\gamma\delta}^{a\beta} \cap N(\Theta)$ consta di una sola componente connessa. In entrambi i casi abbiamo che:

$$(4) \quad \tilde{S} := (\bar{S} \cap N(\Theta))^\circ \text{ e } S^2 \cong \tilde{S}/\tilde{G} \subset \mathcal{Z}^6(\Theta).$$

- (3) Tre luoghi discreti, ognuno costituito al più da quattro punti. Per ogni luogo i rispettivi punti sono congiunti da una 2-sfera $S^2 \cong \tilde{S}_\delta^{a\beta}/\tilde{G}$.

Se qualcuno dei minori $\Delta_{a\beta\gamma}$ e/o $1^{\pm 2} \square_{1\pm 3}^{1\pm 4}$ assume valore ± 1 allora $\Sigma(\Theta)$ è ottenuto rimuovendo dalla lista gli strati relativi a tali isotropie.

Per dimostrare che le orbifolds $\mathcal{O}^4(\Theta)$, di cui si è sopra delineata la costruzione sono distinte dalle orbifolds $\mathcal{O}^4(\Omega)$, effettuiamo nella tesi uno studio delle singolarità del fibrato 3-Sasakiano $\mathcal{M}^7(\Omega)$ e dello spazio dei twistor $\mathcal{Z}^6(\Omega)$ delle orbifolds $\mathcal{O}^4(\Omega)$, che ricordiamo si ottengono per riduzione quaternionale kähleriana per l'azione di $H := Sp(1) \times T_\Omega^2$ su $S^{27} \subset \mathbb{H}^7$, dove $\Omega \in M_{2 \times 3}(\mathbb{Z})$, cfr. [3].

TEOREMA 4. – *I punti singolari delle orbifolds 3-Sasakiane $\mathcal{M}^7(\Omega)$ provengono dagli strati singolari $\tilde{S}$ di $N(\Omega)$, ottenuti intersecando $N(\Omega)$ con i seguenti H -strati $\bar{S}$ relativi ad $\mathbb{H}^7$ (e quelli ottenuti scambiando $(\tilde{w}_{2a}, \tilde{w}_{2a+1})$ con $(\tilde{w}_{2a}, \tilde{w}_{2a+1})$, $a = 1, 2, 3$):*

$$(i) \bar{S}^{123} = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc|cc|cc} 0 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \\ 0 & \tilde{w}_2 & \tilde{w}_3 & \tilde{w}_4 & \tilde{w}_5 & \tilde{w}_6 & \tilde{w}_7 \end{array} \right) \right\},$$

$$(ii) \bar{S}_3^{12} = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc|cc|cc} 0 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \\ 0 & \tilde{w}_2 & \tilde{w}_3 & \tilde{w}_4 & \tilde{w}_5 & \tilde{w}_6 & \tilde{w}_7 \end{array} \right) \right\},$$

$$(iii) \quad \bar{S}_{23}^1 = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc|cc|cc} 0 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \\ 0 & \tilde{w}_2 & \tilde{w}_3 & \tilde{w}_4 & \tilde{w}_5 & \tilde{w}_6 & \tilde{w}_7 \end{array} \right) \right\},$$

dove

$$(\tilde{w}_{2a}, \tilde{w}_{2a+1}) := \frac{e^{i\delta}}{\sin \varphi} (-z_{2a+1} + iz_{2a} \cos \varphi, z_{2a} + iz_{2a+1} \cos \varphi),$$

e

$$(\tilde{w}_{2a}, \tilde{w}_{2a+1}) := \frac{e^{i\delta}}{\sin \varphi} (-z_{2a+1} - iz_{2a} \cos \varphi, z_{2a} - iz_{2a+1} \cos \varphi).$$

L'isotropia associata a questi strati dipende solo dagli interi $\square_{1\pm 3}^{1\pm 2} := \Delta_{12} \pm \Delta_{13} \pm \Delta_{24}$, essendo $\Delta_{\alpha\beta}$ i minori di ordine 2 di Ω .

TEOREMA 5. – Il luogo singolare $\Sigma(\Omega) \subset \mathcal{Z}^6(\Omega)$ è costituito da:

- (1) una 2-sfera S^2 , la cui isotropia dipende solo da uno dei $\square_{1\pm 3}^{1\pm 2}$,
- (2) sei punti isolati provenienti dagli strati per l'azione di $\tilde{H} := Sp(1) \times T_\Omega^2 \times U(1)$ su $\mathbb{H}^7$ (e quelli ottenuti scambiando (z_{2a}, z_{2a+1}) con (w_{2a}, w_{2a+1}) , $a = 1, 2, 3$):

$$(i) \quad \bar{\bar{S}}_3^{12} := \tilde{H} \cdot \left\{ \left(\begin{array}{c|cc|cc|cc|cc} 0 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_6 & w_7 \end{array} \right) \right\}.$$

L'intersezione $\bar{\bar{S}} \cap N(\Omega)$ consta di due componenti connesse ognuna delle quali coincide con uno strato $\tilde{S}$ di $N(\Omega)$. Ogni quoziente $\tilde{S}/\tilde{H}$, genera un punto di $\mathcal{Z}^6(\Omega)$ la cui isotropia dipende da uno dei minori $\pm \Delta_{\alpha\beta}$.

Dal confronto tra i precedenti Teoremi 2, 3, 4, 5 abbiamo infine:

TEOREMA 6. – Le due famiglie di orbifold $\mathcal{O}^4(\Omega)$ e $\mathcal{O}^4(\Theta)$ sono distinte.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOYER, C.P. and GALICKI, K., *The Twistor Space of a 3-Sasakian Manifold*, Internat. Jour. Math., 8 (1997), 595-610.
- [2] BOYER, C.P., GALICKI, K., MANN, B.M. and REES, E.G., *Compact 3-Sasakian 7-Manifolds with Arbitrary second Betti Number*, Invent. Math., 131 (1998), 321-344.
- [3] BOYER, C.P., GALICKI, K. and PICCINNI P., *3-Sasakian Geometry, Nilpotents Orbits and Exceptional Quotients*, Ann. Gl. Anal. Geom., 21 (2002), 85-110.
- [4] KOBAY, P.Z. and SWANN, A., *Quaternionic Geometry of a Nilpotent Variety*, Math. Ann., 297 (1993), 747-763.

Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"

Via della Ricerca Scientifica 1, 00133 Roma

e-mail: bisconti@mat.uniroma2.it

Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Roma II) - XVIII Ciclo

Direttore di Ricerca: Prof. Paolo Piccinni, Università di Roma "La Sapienza"