Annamaria Bianchi

Problemi di inferenza statistica per diffusioni multidimensionali

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 251–254.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_251_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 251-254

Problemi di inferenza statistica per diffusioni multidimensionali

ANNAMARIA BIANCHI

1. – Introduzione.

I processi di diffusione multidimensionali sono soluzioni di equazioni differenziali stocastiche alla Ito del tipo

$$dX_t = S(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

dove $\{W_t, t \geq 0\}$ è un processo di Wiener standard d-dimensionale e X_0 è il valore iniziale di X_t, indipendente dal processo di Wiener. Le funzioni $S(\cdot) : R^d \to R^d$ e $\sigma(\cdot) : R^d \to R^{d \times d}$ sono chiamate, rispettivamente, processo di drift e di diffusione.

I processi di diffusione sono oggi largamente utilizzati in molti settori applicativi come la Biologia, le Scienze Biomediche, l'Economia, e in particolar modo la Finanza. Ciò rende lo studio di problemi statistici connessi di grande interesse ed attualità.

La necessità di analizzare il caso multidimensionale è legata alla necessità di descrivere modelli di interazione tra diverse quantità di interesse applicativo; d'altro canto l'analisi statistico-matematica di tali problemi è stata fin qui limitata dalle notevoli difficoltà che essa presenta rispetto al caso unidimensionale, già ampiamente studiato.

Il problema affrontato è il seguente: avendo osservato una traiettoria del processo durante un intervallo di tempo finito ma sufficientemente lungo $[0, T]$, se ne vuole stimare il drift, assumendo di conoscere il coefficiente di diffusione.
Il resto della Nota è strutturato come segue: la Sezione 2 introduce le ipotesi sul processo e gli stimatori proposti. Nella Sezione 3 si riportano i risultati principali ottenuti nella tesi; essi riguardano il comportamento asintotico (in media quadratica e quasi certo) dello stimatore per il drift. Viene prestata la dovuta attenzione alla stima della velocità di convergenza del metodo rispetto alla durata della osservazione, elemento di fondamentale importanza nella statistica. ([1])

2. – Ipotesi e Metodo di Stima.

Si consideri un processo di diffusione $X = \{X_t, t \geq 0\}$ di dimensione d soluzione di (1). Si suppone che il coefficiente di diffusione $\sigma(\cdot)^2$ sia la matrice identica I; in generale tale coefficiente è identificabile utilizzando la variazione quadratica del pro-

([1]) Risultati più dettagliati sono presentati nel lavoro [1]. Per una trattazione più completa si rimanda alla tesi.

cesso. Inoltre, si suppone che $S(\,\cdot\,)$ appartenga alla classe di funzioni $\mathcal{S}_d$ tali che:

(A1) S è una funzione Lipschitziana;

(A2) esistono costanti $M_0 \geq 0$ e $r > 0$ tali che

$$\left(S(x), \frac{x}{\|x\|}\right) \leq -\frac{r}{\|x\|^p}, \quad 0 \leq p < 1, \quad \|x\| \geq M_0,$$

dove $(\cdot, \cdot)$ denota il prodotto scalare in R^d;

(A3) sono verificate le condizioni del potenziale

$$\frac{\partial S_j}{\partial x_k} = \frac{\partial S_k}{\partial x_j}, \quad \forall j, k = 1, \ldots, d.$$

L'ipotesi (A1) garantisce l'esistenza e l'unicità di una soluzione forte dell'equazione (1) (si veda, per esempio, [4]). Sotto l'ipotesi (A2) e grazie a risultati recenti di Veretennikov ([5]), il processo X è ergodico e ammette un'unica misura invariante; inoltre, è un processo "mixing", proprietà che garantisce la asintotica indipendenza delle variabili del processo a tempi lontani tra loro. Si assume inoltre che il valore iniziale X_0 segua la distribuzione invariante, assicurando così la forte stazionarietà del processo X.

Poichè il coefficiente di diffuzione $\sigma^2 \equiv I$ è non degenere, da (A1) segue che la misura invariante ammette una densità $f(\,\cdot\,)$ rispetto alla misura di Lebesgue. Inoltre, $f(\,\cdot\,)$ è l'unica soluzione limitata dell'equazione di Fokker-Planck, che sotto l'ipotesi (A3) può essere riscritta come

$$\nabla f(x) = 2S(x)f(x), \quad x \in R^d, \tag{2}$$

dove $\nabla f(x) = (f'_1, \ldots, f'_d), f'_l = \dfrac{\partial f}{\partial x_l}, l = 1, \ldots, d.$

Il metodo seguito per la stima del coefficiente di deriva è basato proprio sull'equazione (2), che suggerisce di utilizzare stimatori di f e ∇f per costruire uno stimatore per S.

Per quanto riguarda la densità invariante, si utilizza lo stimatore via kernel classico definito da

$$f_T(x) = \frac{1}{Th_T^d} \int_0^T K\left(\frac{x - X_t}{h_T}\right) dt, \quad x \in R^d, \tag{3}$$

dove $h_T \to 0^+$, per $T \to +\infty$ e $K : R^d \to R$ è una densità di probabilità limitata tale che per $j = 1, \ldots, d$

(K1) $\int\limits_{R^d} K(u_1, \ldots, u_d) u_j du_1 \ldots du_d = 0,$

(K2) $\int\limits_{R^d} \|u\| |u_j| K(u_1, \ldots, u_d) du_1 \ldots du_d < +\infty.$

Sotto l'ipotesi (A2) la funzione di densità f ammette un gradiente ∇f. Dalla teoria delle distribuzioni (funzioni generalizzate), uno stimatore naturale per ∇f è

$(\nabla f)_T = (f'_{1,T}, \dots, f'_{d,T})$, con

$$f'_{i,T}(x) = \frac{1}{Th_{1,T}^{d+1}} \int_0^T K'_i\left(\frac{x - X_t}{h_{1,T}}\right) dt, \quad x \in R^d, \quad i = 1, \dots, d, \tag{4}$$

dove $h_{1,T} \to 0^+$ per $T \to +\infty$ e $K(\,\cdot\,)$ è un kernel che, oltre alle condizioni (K1) e (K2), soddisfa

(K3) $K'_i = \dfrac{\partial K}{\partial x_i}$ esiste ed è ovunque continua per $i = 1, \dots, d$;

(K4) $\int_{R^d} |K'_i(u)| du < +\infty$, $i = 1, \dots, d$;

(K5) $K(\,\cdot\,)$ ha derivate parziali seconde limitate e continue.

Infine, per quanto riguarda lo stimatore del coefficiente di deriva, si osserva che f può assumere valori molto vicini a zero e quindi risolvere direttamente l'equazione (2) per ottenere uno stimatore per S risulta essere un'operazione instabile. Per questo motivo, seguendo tecniche standard di regolarizzazione, lo stimatore proposto è il seguente:

$$S_T(x) = \frac{(\nabla f)_T(x)}{2f_T(x) + \varepsilon_T}, \quad x \in R^d, \tag{5}$$

con $\varepsilon_T \to 0^+$ per $T \to +\infty$. Le quantità ε_T e h_T verranno specificate nella prossima sezione e dipenderanno dal tipo di convergenza considerata.

3. – Risultati.

Si consideri f_T con kernel $K(\,\cdot\,)$ soddisfacente (K1) e (K2) e $h_T = c(\ln T/T)^{1/4}$ $(c > 0)$ se $d = 2$, e $h_T = cT^{-1/(d+2)}$ $(c > 0)$ se $d > 2$, e si consideri $(\nabla f)_T$ con kernel $K(\,\cdot\,)$ tale che valgano (K1)-(K4) e $h_{1,T} = c(\ln T/T)^{1/6}$ $(c > 0)$ se $d = 2$, e $h_{1,T} = cT^{-1/(d+4)}$ $(c > 0)$ se $d > 2$.

PROPOSIZIONE 1. – *Sotto le ipotesi precedenti e per* $\varepsilon_T = T^{-1/2}$ *se* $d = 2$, *e* $\varepsilon_T = (T \ln T)^{-2/(d+2)}$ *se* $d > 2$

$$\limsup_{T \to +\infty} \Phi_T^2(d) E[\|S_T(x) - S(x)\|^2] < +\infty,$$

dove $\Phi_T(d) = (T/\ln T)^{1/3}$ *se* $d = 2$, $\Phi_T(d) = T^{2/(d+4)}$ *se* $d > 2$, *e* $\|\cdot\|$ *è la norma Euclidea in* R^d.

La proposizione precedente mostra che S_T converge a S in L^2 con velocità almeno pari a $\Phi_T(d)^{-1}$. Si osservi che la velocità di convergenza dipende dalla dimensione e, in particolare, diminuisce all'aumentare della stessa.

La dimostrazione della Proposizione 1 consiste nel mostrare dapprima la convergenza di f_T e $(\nabla f)_T$ a f e ∇f, rispettivamente, e poi nell'estendere il risultato a S_T, mediante una opportuna scomposizione di $(S_T - S)$. I risultati riguardanti f_T e $(\nabla f)_T$ si basano sul lavoro di Blanke e Bosq [3], dove vengono fornite velocità di convergenza per stimatori di tipo kernel per la densità.

Per quanto riguarda la convergenza quasi certa, si consideri f_T con kernel $K(\,\cdot\,)$ a supporto compatto e tale che valgano (K1)–(K3) e $h_T = c\big((\log T)^{1+1/\delta}/T\big)^{1/(d+2)}$, $c > 0$, e si consideri $(\nabla f)_T$, con kernel a supporto compatto soddisfacente (K1)–(K5) e con $h_{1,T} = c\big((\log T)^{1+1/\delta}/T\big)^{1/(d+2)}$ $(c > 0)$. Sotto tali ipotesi, si è mostrata la convergenza forte, puntuale ed uniforme (su tutto R^d), di f_T e $(\nabla f)_T$. Questi risultati si basano sul lavoro di Blanke [2]. Per il coefficiente di deriva, segue immediatamente che, per $x \in R^d$ fissato, $S_T(x)$ converge quasi certamente a $S(x)$, poiché S_T è una funzione continua di f_T, $(\nabla f)_T$ e ε_T. Per quanto riguarda la convergenza uniforme, può essere ottenuta su insiemi compatti, ma in generale non sull'intero R^d, dal momento che l'estremo inferiore di f su R^d è zero. D'altra parte, per ogni insieme compatto $K \subset R^d$, $\inf_{x\in K} f(x) > 0$.

PROPOSIZIONE 2. – *Sotto le ipotesi precedenti e per* $\varepsilon_T = T^{-1/(d+2)}$

$$\limsup_{T\to+\infty} T^{\frac{1}{d+2}} \sup_{x\in K} \|S_T(x) - S(x)\| < +\infty \quad q.c.$$

per ogni insieme compatto $K \subset R^d$.

Nella tesi viene dimostrato anche un teorema del limite centrale uniforme, con la relativa velocità di convergenza, per una versione discretizzata degli stimatori. I metodi studiati sono poi applicati a dati simulati associati ad un processo di Ornstein-Uhlenbeck bi-dimensionale, ottenendo dei primi risultati numerici incoraggianti.

BIBLIOGRAFIA

[1] BIANCHI A., *Nonparametric Trend Coefficient Estimation for Multidimensional Diffusions*, C.R.Acad. Sci. Paris, Ser. I, **345** (2007), 101-105.
[2] BLANKE D., *Sample paths adaptive density estimator*, Math. Methods Statist., **13**, 2 (2004), 123-152.
[3] BLANKE D. and BOSQ D., *A family of minimax rates for density estimators in continuous time*, Stoch. Anal. Appl., **18**, 6 (2000), 871-900.
[4] CAPASSO V. and BAKSTEIN D., *An Introduction to Continuous-time Stochastic Processes*, Birkhäuser, Boston.
[5] VERETENNIKOV A. YU., *On subexponential mixing rate for Markov processes*, Theory Probab. Appl., **49** (1) (2005), 110-122.

Dipartimento di Matematica, Statistica, Informatica e Applicazioni
Università degli Studi di Bergamo
e-mail: annamaria.bianchi@unibg.it
Dottorato di Ricerca in Matematica e Statistica per le Scienze Computazionali
(sede amministrativa: Università di Milano) - Ciclo XIX
Direttori di ricerca: Prof. Vincenzo Capasso (Università degli Studi di Milano) e
Prof. Denis Bosq (Université Paris VI)