La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Alessia Berti

Problemi di riflessione-trasmissione in mezzi stratificati

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 247–250.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_247_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 247-250

Problemi di riflessione-trasmissione in mezzi stratificati

ALESSIA BERTI

Nello studio di problemi di riflessione e trasmissione si considera la propagazione di onde attraverso solidi stratificati, ossia solidi i cui parametri materiali sono costanti lungo piani perpendicolari ad una direzione assegnata, ad esempio l'asse z. Si suppone che il mezzo occupi uno strato di ampiezza finita tra due semispazi omogenei, oppure che occupi l'intero spazio $\mathbb{R}^3$. I parametri materiali sono continui lungo la direzione di stratificazione o presentano al più un numero finito di discontinuità di tipo salto per simulare il contatto tra diversi mezzi materiali.

In questa tesi si considerano due casi:

- propagazione di onde meccaniche in solidi viscoelastici (o elastici);
- propagazione di onde elettromagnetiche in solidi lineari.

Si assume inoltre che il mezzo sia anisotropo, con memoria e che le onde siano di tipo armonico nel tempo. Sotto queste ipotesi, in entrambi i contesti, le equazioni del moto vengono ridotte ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine della forma

$$\boldsymbol{w}'(z) = \boldsymbol{N}(z)\boldsymbol{w}(z) \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{N}$ è una matrice 6×6 nel caso viscoelastico, 4×4 nel caso eletromagnetico, a coefficienti complessi che dipende dai parametri materiali; $\boldsymbol{w}$ è un vettore proporzionale al vettore spostamento-trazione (in viscoelasticità) o al campo elettromagnetico (in elettromagnetismo).

Nei problemi di riflessione e trasmissione, viene assegnata un'onda che proviene dall'infinito (ad esempio $z \to +\infty$) e che, attraversando il mezzo, produce un'onda riflessa (rilevabile per $z \to +\infty$) e un'onda trasmessa (rilevabile per $z \to -\infty$). Risolvere tale problema significa determinare un'unica soluzione di (1) tale che

$$\boldsymbol{w} = \begin{cases} \boldsymbol{w}^i + \boldsymbol{w}^r & z \to +\infty \\ \boldsymbol{w}^t & z \to -\infty \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{w}^i$ è il campo incidente (noto) e $\boldsymbol{w}^r, \boldsymbol{w}^t$ sono i campi riflessi e trasmessi (incogniti). Inoltre, $\boldsymbol{w}$ deve essere continua su $\mathbb{R}$ e i campi $\boldsymbol{w}^r, \boldsymbol{w}^t$ devono risultare di tipo "uscente" dal mezzo, cioè $\boldsymbol{w}^r$ deve essere un'onda che si propaga verso l'alto e $\boldsymbol{w}^t$ un'onda che si propaga verso il basso.

Seguendo le tecniche sviluppate per l'equazione di Schrödinger uno-dimensionale

([4]), si introducono due basi $\boldsymbol{\psi}_1^+, ..., \boldsymbol{\psi}_{2m}^+$, $\boldsymbol{\psi}_1^-, ..., \boldsymbol{\psi}_{2m}^-$ ($m = 3$ nel caso viscoelastico, $m = 2$ nel caso elettromagnetico) che hanno un particolare comportamento asintotico rispettivamente per $z \to +\infty$ e $z \to -\infty$. Più precisamente,

$$\boldsymbol{\psi}_k^+ e^{-iv_k^+ z} \to \boldsymbol{p}_k^+, \qquad \boldsymbol{\psi}_k^- e^{-iv_k^- z} \to \boldsymbol{p}_k^-, \tag{2}$$

essendo $iv_k^\pm, \boldsymbol{p}_k^\pm$ autovalori e autovettori di $\boldsymbol{N}^\pm = \lim_{z\to\pm\infty} \boldsymbol{N}(z)$. Si assume che $\boldsymbol{N}^\pm$ siano diagonalizzabili e che

$$\int_0^{+\infty} \|\boldsymbol{N}(z) - \boldsymbol{N}^+\| dz < +\infty, \qquad \int_{-\infty}^{0} \|\boldsymbol{N}(z) - \boldsymbol{N}^-\| dz < +\infty.$$

Inoltre, $\boldsymbol{\psi}_1^+, ..., \boldsymbol{\psi}_{2m}^+$, $\boldsymbol{\psi}_1^-, ..., \boldsymbol{\psi}_{2m}^-$ sono le uniche soluzioni di (1) con comportamento asintotico (2) se e soltanto se la condizione

$$\operatorname{Im} v_1^+ = ... = \operatorname{Im} v_{2m}^+, \qquad \operatorname{Im} v_1^- = ... = \operatorname{Im} v_{2m}^- \tag{3}$$

è soddisfatta.

Nel caso di uno strato tra due semispazi omogenei, $\boldsymbol{\psi}_k^\pm = \boldsymbol{w}_k^\pm e^{iv_k^\pm z}$ nelle regioni omogenee.

Per poter distinguere tra onde che si propagano verso il basso e verso l'alto, si introduce il flusso di energia (vettore di Poyinting) e la sua componente $\mathcal{F}_{\boldsymbol{w}}$ lungo l'asse z.

DEFINIZIONE 1. – *Un'onda $\boldsymbol{w}$ si propaga verso l'alto [verso il basso] attraverso un piano $z = c$ =costante se*

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{w}}(c) > 0, \qquad [\mathcal{F}_{\boldsymbol{w}}(c) < 0].$$

DEFINIZIONE 2. – *Un'onda $\boldsymbol{w}$ si propaga asintoticamente verso l'alto [verso il basso] per $z \to +\infty$ se esiste $Z > 0$ tale che*

$$\mathcal{F}_{\boldsymbol{w}}(z) > 0, \qquad [\mathcal{F}_{\boldsymbol{w}}(z) < 0] \qquad \forall z > Z.$$

Si può dare un'analoga definizione per $z \to -\infty$. Il flusso di energia $\mathcal{F}_{\boldsymbol{w}}$ è rappresentato da una forma quadratica hermitiana associata a due matrici $\boldsymbol{\Phi}^+$ per $z \to +\infty$ e $\boldsymbol{\Phi}^-$ per $z \to -\infty$, definite tramite le soluzioni $\boldsymbol{\psi}_1^\pm, ..., \boldsymbol{\psi}_{2m}^\pm$. Rappresentiamo $\boldsymbol{\Phi}^\pm$ in blocchi di matrici $m \times m$,

$$\boldsymbol{\Phi}^\pm = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1^\pm & \boldsymbol{\Phi}_2^\pm \\ \boldsymbol{\Phi}_3^\pm & \boldsymbol{\Phi}_4^\pm \end{pmatrix}$$

e assumiamo che $\boldsymbol{\Phi}_1^\pm$ e $\boldsymbol{\Phi}_4^\pm$ siano definite positive e negative rispettivamente. Questa ipotesi garantisce la suddivisione di m onde che si propagano verso l'alto e m verso il basso sia per $z \to +\infty$ sia per $z \to -\infty$. Inoltre, ogni combinazione lineare di $\boldsymbol{\psi}_1^+, .., \boldsymbol{\psi}_m^+$ $(\boldsymbol{\psi}_{m+1}^+, .., \boldsymbol{\psi}_{2m}^+)$ risulta un'onda che si propaga verso l'alto (verso il basso) per $z \to +\infty$. Analoghe considerazioni valgono per $\boldsymbol{\psi}_1^-, ..., \boldsymbol{\psi}_{2m}^-$.

Pertanto, le equazioni che regolano il problema di riflessione e trasmissione per onde incidenti inviate dall'alto e dal basso sono date rispettivamente da

$$\boldsymbol{\psi}_{h+m}^+ + \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{R}_{hk}^+ \boldsymbol{\psi}_k^+ = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{T}_{hk}^- \boldsymbol{\psi}_{k+m}^-, \qquad h = 1, ..., m \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\psi}_h^- + \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{R}_{hk}^- \boldsymbol{\psi}_{k+m}^- = \sum_{k=1}^{m} \boldsymbol{T}_{hk}^+ \boldsymbol{\psi}_k^+ \qquad h = 1, ..., m \tag{5}$$

dove $\boldsymbol{R}^\pm, \boldsymbol{T}^\pm$ sono le matrici di riflessione e trasmissione. La matrice

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{T}^+ & \boldsymbol{R}^+ \\ \boldsymbol{R}^- & \boldsymbol{T}^- \end{pmatrix}$$

è detta matrice di scattering e generalizza la matrice di scattering 2×2 ottenuta per l'equazione di Schrödinger ([4]).

I risultati principali della tesi sono i seguenti.

TEOREMA 1. – *Supponiamo che valga una delle due condizioni*

(a) *il mezzo occupa uno strato di ampiezza finita tra due semispazi omogenei;*

(b) *il mezzo è non omogeneo senza memoria, occupa l'intero spazio e le onde sono omogenee.*

Allora, se $\boldsymbol{\Phi}_1^\pm$ *e* $\boldsymbol{\Phi}_4^\pm$ *sono definite positive e negative rispettivamente, dati i campi incidenti* $\boldsymbol{\psi}_{h+m}^+, \boldsymbol{\psi}_h^-$, *esistono uniche onde riflesse e trasmesse che risolvono* (4)-(5).

TEOREMA 2. – *Supponiamo che il mezzo occupi l'intero spazio* $\mathbb{R}^3$ *e che valga la condizione*

$$\mathrm{Im}\, \nu_1^+ = ... = \mathrm{Im}\, \nu_m^+, \qquad \mathrm{Im}\, \nu_{m+1}^- = ... = \mathrm{Im}\, \nu_{2m}^-$$

Se $\boldsymbol{\Phi}_1^\pm$ *e* $\boldsymbol{\Phi}_4^\pm$ *sono definite positive e negative rispettivamente, dato un campo incidente* $\boldsymbol{w}^i$ *esistono uniche matrici di riflessione e trasmissione.*

Per le dimostrzioni sono state utilizzate le proprietà del flusso di energia e la positiva (negativa) definitezza delle matrici $\boldsymbol{\Phi}_1^\pm$, $\boldsymbol{\Phi}_4^\pm$ (crf. [1]-[3]). Nel caso di uno strato esistono uniche le onde riflesse e trasmesse, mentre quando il solido occupa l'intero spazio si ha solo l'esistenza ma non l'unicità. Questo è dovuto al fatto che in generale $\boldsymbol{\psi}_1^+, ..., \boldsymbol{\psi}_{2m}^+$ e $\boldsymbol{\psi}_1^-, ..., \boldsymbol{\psi}_{2m}^-$ sono definite a meno di un termine $\boldsymbol{v}_k^\pm e^{i\nu^\pm z}$, con $\boldsymbol{v}_k^\pm \underset{z \to \pm\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{0}$.

Infine sono state analizzate le proprietà delle matrici di riflessione e trasmissione generalizzando i risultati ottenuti in ([4]) per la matrice di scattering 2×2. Più precisamente nel caso di mezzo elastico e incidenza normale, $\boldsymbol{R}^{\pm}, \boldsymbol{T}^{\pm}$ sono state scritte in termini delle soluzioni $\boldsymbol{\psi}_1^{\pm}, ..., \boldsymbol{\psi}_{2m}^{\pm}$ e dei parametri materiali ed è stato provato il seguente risultato ([2]).

TEOREMA 3. – *Siano*

$$r^{\pm} = \det \boldsymbol{R}^{\pm}, \qquad t^{\pm} = \det \boldsymbol{T}^{\pm}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} t^{+} & r^{+} \\ r^{-} & t^{-} \end{pmatrix}.$$

La matrice $\boldsymbol{D}$ *soddisfa le seguenti proprietà*

1. $t^{+}, t^{-} \neq 0$
2. $t^{+} = t^{-}$
3. $\boldsymbol{D}$ *è unitaria*
4. $|t^{+}| = |t^{-}| < 1$, $|r^{+}| = |r^{-}| < 1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BERTI A., *Existence and uniqueness for the reflection and transmission problem in stratified electromagnetic media*, J. Math. Phys., **47** (2006), 122901.

[2] BERTI A., *Scattering matrix for the reflection and transmission problem in a viscoelastic medium*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B (8), **10** (2007), 521-533.

[3] CAVIGLIA G. MORRO A., *Existence and uniqueness of the solution in the frequency domain for the reflection-transmission problem in a viscoelastic layer*, Arch. Mech., **56** (2004), 59-82.

[4] FADEEV L.D., *Properties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation*, Am. Math. Soc. Transl., **65** (2) (1967), 139-166.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Brescia
e-mail: alessia.berti@ing.unibs.it
Dottorato in Matematica e Applicazioni
(sede amministrativa: Università di Genova) - Ciclo XIX
Direttore della Ricerca: Prof. Giacomo Caviglia, Università degli Studi di Genova