La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ELVISE BERCHIO

Su alcune equazioni ellittiche e paraboliche di ordine superiore con condizioni al contorno di Steklov

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1 (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 243–246.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_243_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

Su alcune equazioni ellittiche e paraboliche di ordine superiore con condizioni al contorno di Steklov

ELVISE BERCHIO

1. – Introduzione.

In questa tesi abbiamo principalmente considerato equazioni ellittiche del quarto ordine del tipo:

$$(1) \quad \Delta^2 u = f(x, u) \quad \text{in } \Omega,$$

dove $\Omega \subset \mathbf{R}^n (n \geq 2)$ è un dominio liscio e limitato, f è una funzione che soddisfa opportune ipotesi e $\Delta^2 := -\Delta(-\Delta)$ è l'operatore biarmonico. In $\mathbf{R}^2$, se Ω è la forma di una piastra e $f = f(x)$ la forza deformante la piastra, allora la soluzione u di (1) rappresenta la deformazione subita dalla piastra. D'altra parte, (1) è la versione nel quarto ordine della corrispondente, e più nota, equazione del secondo ordine in cui, al posto dell'operatore biarmonico, compare l'operatore laplaciano. Tuttavia, come la tesi evidenzia ampiamente, i problemi associati a (1) non risultano essere semplici generalizzazioni di problemi noti. Infatti essi non solo richiedono, in molti casi, l'applicazione di idee del tutto nuove ma, talvolta, presentano comportamenti sorprendenti se confrontati con quelli noti nel secondo ordine.

Un aspetto centrale nello studio dell'equazione (1) riguarda la scelta delle condizioni al contorno. Queste ultime, non solo sono strettamente connesse al modello fisico considerato, ma cambiano significativamente la natura del problema. Nella tesi si sono effettuate diverse scelte di condizioni al contorno, tutte dettate da specifiche motivazioni quali, ad esempio, le tecniche applicabili nelle dimostrazioni oppure semplicemente perchè associate, in maniera naturale, ad un particolare problema variazionale. Qui di seguito ne presentiamo nel dettaglio una.

Per quanto riguarda le ipotesi sulla nonlinearità f , anche in questo caso, nel lavoro, si sono sperimentate diverse possibilità tra le quali spiccano, per difficoltà ed interesse, i problemi aventi nonlinearità a crescita critica (nel senso delle immersioni di Sobolev). In questa nota ne forniamo un esempio soffermandoci su una particolare equazione modello.

2. – Condizioni al contorno di tipo Steklov

Quando si studiano equazioni quali la (1), ci si trova di fronte alla mancanza di un principio del massimo generale o "positivity preserving property". Infatti, se Ω è un

dominio generale, non è chiaro quando valga l'implicazione:

$$(2) \quad f(x) \geq 0 \text{ in } \Omega \implies u \geq 0 \text{ in } \Omega .$$

Nel lavoro abbiamo esaminato il legame tra le condizioni al contorno e la validità dell'implicazione (2). A questo proposito, risultano essere particolarmente interessanti le seguenti condizioni, dette di Steklov:

$$(3) \quad u = \Delta u - du_\nu = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

dove $d \in \mathbf{R}$ ed u_ν indica la derivata normale esterna alla frontiera di Ω . Le (3) sono, in un certo senso, intermedie tra le condizioni di Dirichlet (che corrispondono a $d = -\infty$) e quelle di Navier (per $d = 0$). A quanto ci risulta, esse non sono state finora studiate in modo approfondito: esistono solo un paio lavori, risalenti agli inizi degli anni settanta, e solo nel caso 2 dimensionale (si veda [1]). D'altra parte, le (3) hanno anche un'interessante interpretazione nella teoria dell'elasticità: la costante d dipende, attraverso la così detta costante di Poisson, dalla curvatura principale della frontiera di Ω e dal materiale di cui la piastra è costituito (si veda [4]).

Procedendo in maniera più rigorosa, precisiamo che, data $f = f(x) \in L^2(\Omega)$, per soluzione dell'equazione (1) con le condizioni (3) intendiamo una soluzione in senso debole, ovvero una funzione $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v - d \int_{\partial\Omega} u_\nu v_\nu = \int_{\Omega} f v \quad \text{per ogni } v \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) .$$

Definiamo inoltre $\mathcal{H}(\Omega) := [H^2 \cap H_0^1(\Omega)] \setminus H_0^2(\Omega)$

$$(4) \quad \sigma := \inf_{u \in \mathcal{H}(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} |\Delta u|^2}{\int_{\partial\Omega} |u_\nu|^2} .$$

Senza entrare nel dettaglio, osserviamo che la (4) è la caratterizzazione variazionale del primo autovalore al contorno di Steklov. In particolare, il Teorema che segue afferma che tale autovalore è semplice e la prima autofunzione è positiva in Ω .

TEOREMA 1 [1]. – *Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) un dominio liscio, limitato e connesso. Allora*

(i) *l'estremo inferiore in (4) è raggiunto e, modulo una costante moltiplicativa, il minimizzante $\bar{u}$ è unico, strettamente positivo in Ω , soddisfa $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} < 0$ su $\partial\Omega$ e risolve il problema (1)-(3) con $d = \sigma$ e $f \equiv 0$.*

(ii) *se $0 \leq d < \sigma$ e $f \geq 0$ ($f \not\equiv 0$) in Ω , la soluzione u del problema (1)-(3) soddisfa $u > 0$ in Ω e $u_\nu < 0$ su $\partial\Omega$.*

Osserviamo che nella (ii) il limite superiore è ottimale. Infatti, quando $d = \sigma$, il problema (1)-(3) perde esistenza o unicità al variare di f . Al contrario, perlomeno nel caso 1-dimensionale, la (ii) continua a valere anche per $d < 0$ (si veda [1]). La dimostrazione di questo risultato è costruita appositamente per il caso 1-dimensionale e non può essere estesa a dimensioni maggiori. Nel caso generale, invece, la tesi è stata provata applicando metodi di tipo variazionale.

Quando $\Omega = B$, la palla unitaria in $\mathbf{R}^n$, abbiamo mostrato che $\sigma = n$ e abbiamo inoltre determinato la forma esplicita della prima autofunzione:

TEOREMA 2 [1]. — Sia $B \subset \mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) la palla unitaria, allora

$$\int_B |\Delta u|^2 \geq n \int_{\partial B} |u_\nu|^2 \quad \text{per ogni } u \in H^2 \cap H_0^1(B).$$

Inoltre, la costante n è ottimale e l'uguaglianza vale se e solo se $u(x) = a(1 - |x|^2)$ per qualche $a \in \mathbf{R}$.

3. — Nonlinearità a crescita critica.

Presentiamo ora una possibile scelta di f in (1). Precisamente, dato $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n \geq 5$) un dominio liscio e limitato, consideriamo la seguente equazione modello a crescita critica:

$$(5) \quad \Delta^2 u = u^{2^*-1}, \quad u > 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$2^* = \frac{2n}{n-4}$ è l'esponente critico di Sobolev.

È ben noto, dai risultati relativi al secondo ordine, che le equazioni nonlineari aventi termini a crescita critica presentano fenomeni estremamente interessanti riguardo l'esistenza/nonesistenza di soluzioni positive, si veda il celebre articolo di Brezis-Nirenberg [3]. Passando al quarto ordine questo problema risulta essere addirittura più complesso. Ad esempio, se Ω è un dominio strettamente stellato, è noto che (5) non ammette soluzioni positive, nè nel caso di condizioni al contorno di Dirichlet, nè nel caso Navier (si veda [2] per le referenze). È quindi del tutto naturale chiedersi se i risultati di nonesistenza dipendano effettivamente dalla geometria del dominio considerato. La risposta è positiva. In letteratura si sono infatti ottenuti risultati di esistenza considerando, ad esempio, domini con topologie non banali oppure particolari domini contraibili (non stellati). Una seconda domanda naturale è la seguente: i risultati di nonesistenza dipendono dalla particolare nonlinearità (potenza) considerata? Anche a questa domanda si può dare una risposta affermativa facendo riferimento alla letteratura nota. Infatti esistono diversi lavori in cui si è ottenuta esistenza, sia nel caso Dirichlet che Navier, perturbando la nonlinearità con termini sottocritici (si veda [2] per le referenze). Nella tesi si è invece cercato di rispondere ad un terza domanda altrettanto naturale: i risultati di nonesistenza dipendono dalle condizioni al contorno?

In particolare, si è studiata l'equazione (5) con le condizioni (3). L'idea è quella di perturbare le condizioni al contorno, invece della geometria del dominio o della non-linearità. In effetti, il risultato che segue non richiede alcuna ipotesi sulla geometria del dominio e la non-linearità è di tipo pura potenza.

TEOREMA 3 [2]. – Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n \geq 5$) un dominio liscio e limitato e σ sia definita come in (4). Allora,

(i) se $d \geq \sigma$, il problema (5)-(3) non ammette soluzioni positive.

(ii) esiste $\sigma^* < \sigma$ tale che se $\sigma^* < d < \sigma$, il problema (5)-(3) ammette una soluzione di energia minima u_d ; queste soluzioni soddisfano

$$u_d \rightarrow 0 \quad \text{in } H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \quad \text{e} \quad \frac{u_d}{\|\Delta u_d\|_2} \rightarrow \bar{u} \quad \text{in } H^2(\Omega) \quad \text{per } d \rightarrow \sigma,$$

dove $\bar{u}$ è l'autofunzione corrispondente a σ tale che $\|\Delta \bar{u}\|_2 = 1$.

Nel caso in cui $\Omega = B$, la palla unitaria in $\mathbf{R}^n$, il Teorema può essere formulato in modo più "preciso". Per $n \geq 5$ definiamo

$$\sigma_n = \begin{cases} n - (n-4)(n^2-4) \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2^{\frac{n}{2}+1}} \left(\frac{n\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(n)} \right)^{\frac{4}{n}} \left(\frac{\Gamma(\frac{2n}{n-4})}{\Gamma(\frac{n^2}{2(n-4)})} \right)^{1-\frac{4}{n}} & \text{se } n = 5 \text{ or } n = 6 \\ \frac{4(n-3)}{n-4} & \text{se } n \geq 7 \end{cases}$$

($\sigma_5 \approx 4.5$ e $\sigma_6 \approx 5.2$) ed enunciamo

TEOREMA 4 [2]. – Sia $\Omega = B$ (la palla unitaria). Allora

(i) per $d \leq 4$, il problema (5)-(3) non ammette soluzioni positive;

(ii) per ogni $d \in (\sigma_n, n)$, (5)-(3) ammette una soluzione radiale. Inoltre la soluzione è superarmonica in $\bar{B}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BERCHIO E., GAZZOLA F. and MITIDIERI E., *Positivity preserving property for a class of biharmonic elliptic problems*, J. Diff. Eq., **229** (2007), 1-23.
- [2] BERCHIO E., GAZZOLA F. and WETH T., *Critical growth biharmonic elliptic problems under Stekloff-type boundary conditions*, Adv. Diff. Eq., **12** (2007), 381-406.
- [3] BREZIS H. and NIRENBERG L., *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), 437-477.
- [4] VILLAGGIO P., *Mathematical models for elastic structures*, Cambridge University Press, **36** (1997).

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Torino

e-mail: elvise.berchio@unito.it

Dottorato di Ricerca in Matematica (sede amministrativa: Università di Torino) - Ciclo XVIII

Direttore di ricerca: Prof. Filippo Gazzola (Politecnico di Milano)