La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Cristina Bardelle

Teorema del centro di Lyapunov equivariante per PDE

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 227–230.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_227_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 227-230

Teorema del centro di Lyapunov equivariante per PDE

CRISTINA BARDELLE

Oggetto di questa tesi è lo studio dell'esistenza di soluzioni quasiperiodiche di piccola ampiezza di alcune equazioni hamiltoniane alle derivate parziali con simmetria, nello spirito di un recente teorema dimostrato da Nekhoroshev per sistemi di dimensione finita.

Il teorema di Nekhoroshev [5] afferma che, dato un sistema hamiltoniano a n gradi di libertà e che ammette s integrali del moto tali che $1 \leq s \leq n$, e sotto una opportuna condizione di non-degenerazione, esiste una famiglia s-dimensionale di tori invarianti che formano una sottovarietà simpletticca di dimensione $2s$ dello spazio delle fasi. Su tali tori il moto è quasiperiodico. Tale teorema è una generalizzazione sia del teorema di Liouville-Arnold (sistemi integrabili $n = s$), sia del teorema di Poincaré-Lyapunov (orbite periodiche $s = 1$).

In questa tesi si generalizza tale teorema ad alcune equazioni alle derivate parziali (PDEs) nel caso in cui la simmetria è generata da $n - 1$ Hamiltoniane quadratiche.

Più precisamente, siamo interessati ad un sistema hamiltoniano di dimensione infinita con Hamiltoniana reale data da

$$H(z, \bar{z}) = H^{(0)}(z, \bar{z}) + F(z, \bar{z}) \equiv \sum_{j \geq 1} \omega_j z_j \bar{z}_j + F(z, \bar{z}), \tag{1}$$

dove F è un polinomio omogeneo reale di grado $r \geq 4$ e sotto l'ipotesi che la parentesi di Poisson di H con ognuna delle seguenti $n - 1$ Hamiltoniane quadratiche

$$H^{(l)}(z, \bar{z}) = \sum_{j \geq 1} v_j^{(l)} z_j \bar{z}_j, \qquad l = 2, \ldots, n < +\infty. \tag{2}$$

sia identicamente nulla. Le equazioni del moto associate ad H sono

$$\dot{z}_j = i\omega_j z_j + i f_j(z, \bar{z}), \qquad \text{dove} \qquad f_j \equiv \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_j}. \tag{3}$$

Il sistema viene studiato nello spazio delle fasi ℓ_s^2 delle successioni $z = \{z_n\}_{n \geq 1}$ tali che $\sum_{j \geq 1} |z_j|^2 j^{2s} < +\infty$. La dimostrazione si basa sul metodo di riduzione di Lyapunov-Schmidt e sul teorema standard della funzione implicita, e prova, sotto un'opportuna condizione di non-degenerazione e di non-risonanza, l'esistenza di una famiglia a n parametri di tori n-dimensionali. Tale famiglia non è continua ma è una famiglia di Cantor, come succede in tutti i problemi di piccoli divisori.

Veniamo ad una più precisa descrizione del nostro teorema. Sia $\boldsymbol{T}_I$ il toro $|z_i|^2 = I_i \neq 0,\ i = 1, \ldots, n$ e $|z_i| = 0,\ i = n+1, \ldots$ e si assuma che le n funzioni $H, H^{(2)} \ldots, H^{(n)}$ soddisfino

(H1) per $l = 2, \ldots, n$ F e $H^{(l)}$ sono in involuzione, ovvero le loro parentesi di Poisson sono identicamente nulle, i.e. $\{F, H^{(l)}\} = 0$;

(H2) i differenziali $dH^{(2)}, \ldots, dH^{(n)}$ sono linearmente indipendenti in ogni punto di $\boldsymbol{T}_I$;

(H3) $f \equiv (f_1, f_2, \ldots)$ è una funzione polinomiale regolarizzante i.e. $f : \ell_s^2 \to \ell_{s+d}^2$ con $d \geq 0$.

Allora, come nella dimostrazione del teorema di Arnold–Liouville, si fissi una classe di omotopia $\rho = (1, 0, \ldots, 0)$ nel primo gruppo di omotopia $\pi_1(\boldsymbol{T}_I) \simeq \boldsymbol{Z}^n$, ed un vettore $c = (1, c_2, ..., c_n) \in \boldsymbol{R}^n$ in modo tale che, definendo la combinazione lineare delle parti quadratiche delle Hamiltoniane, ovvero $H_0^{(0)} := H^{(0)} - c_2 H^{(2)} - .... - c_n H^{(n)}$, le traiettorie su $\boldsymbol{T}_I$ del suo campo vettoriale siano 2π-periodiche e omotope a ρ. Più in generale per $(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \boldsymbol{R}^{n-1}$ si dovrà considerare la combinazione lineare $H_\varepsilon^{(0)} := H^{(0)} - (c_2 + \varepsilon_2)H^{(2)} - .... - (c_n + \varepsilon_n)H^{(n)}$; si denoterà con $(\hat{\omega}_1(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n), \hat{\omega}_2(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n), \hat{\omega}_3(\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n), \ldots\ldots)$ la successione delle sue frequenze. Inoltre si userà la notazione $\omega(\varepsilon_1) := \hat{\omega}_1(0, \ldots, 0) + \varepsilon_1$.

La condizione di non-risonanza è la seguente:

(NR) Per $\gamma > 0$ sufficientemente piccolo e per $\tau \leq d$ esiste un insieme $\mathcal{E}_\gamma \subset \boldsymbol{R}^n$ che ha 0 come punto di accumulazione e tale che $\forall \varepsilon := (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \mathcal{E}_\gamma$ si ha

$$|\omega(\varepsilon)k - \hat{\omega}_j(\varepsilon)| \geq \frac{\gamma}{j^\tau}, \qquad \forall (k, j) \neq (1, 1), (0, 2), (0, 3), \ldots, (0, n). \tag{4}$$

Inoltre, per ogni cono aperto $\mathcal{C} \subset \boldsymbol{R}^n$ che ha come vertice l'origine, $\mathcal{C} \cap \mathcal{E}_\gamma$ deve avere nell'origine un punto di accumulazione.

REMARK 1. – *La condizione (NR) è data in termini dei parametri ε poichè ciò è utile per le applicazioni.*

Per quanto riguarda la condizione di non-degenerazione si consideri la media di F su $\boldsymbol{T}_I$, ovvero

$$\begin{aligned} \langle F \rangle (z_1, ..., z_n, \bar{z}_1, ..., \bar{z}_n) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int & F(z_1 e^{i\phi_1}, ..., z_n e^{i\phi_n}, z_{n+1}, ..., \\ & \bar{z}_1 e^{-i\phi_1}, ..., \bar{z}_n e^{-i\phi_n}, \bar{z}_{n+1}, ...) d\phi_1 ... d\phi_n \big|_{z_{n+1} = z_{n+2} = ... = 0} \end{aligned} \tag{5}$$

che, per (H1), (H2), si dimostra facilmente essere una funzione solo di $I_j := |z_j|^2$, $j = 1, ..., n$, e si assuma

(ND) Esistono $I^* > 0$ and $\mathcal{U} := (0, I^*)^n \subset \boldsymbol{R}^n$ tali che $\det\left(\dfrac{\partial^2 \langle F \rangle}{\partial I_i \partial I_j}\right) \neq 0 \quad \forall I \in \mathcal{U}$.

Per ogni $\varepsilon \in \mathcal{E}_\gamma$ si considerino $\check{\omega}_1(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) := \omega_1 - \sum_{l=2}^{n} \varepsilon_l v_1^{(l)} + \varepsilon_1$, per $j = 2, ..., n$ $\check{\omega}_j(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) := \omega_j - \sum_{l=2}^{n} \varepsilon_l v_j^{(l)}$ e per ogni $I \in \mathcal{U}$

$$\Omega_j(I) := \omega_j + \frac{\partial \langle F \rangle}{\partial I_j}(I). \tag{6}$$

Si noti che $\Omega(\mathcal{U})$ rappresenta l'insieme delle possibili frequenze del sistema non lineare. Infine si definisca $\mathcal{W}_\gamma := \check{\omega}(\mathcal{E}_\gamma) \cap \Omega(\mathcal{U})$. Si noti che, per le ipotesi (NR) e (ND), tale insieme è non vuoto e ha $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ come punto di accumulazione.

Per $I \in \mathcal{U}$ si definisca $v_I(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) := \left(\sqrt{I_1} e^{i\varphi_1}, \sqrt{I_2} e^{i\varphi_2}, \ldots, \sqrt{I_n} e^{i\varphi_n}, 0, \ldots\right)$ in modo tale che $v_I(\omega_1 t, \omega_2 t, \ldots, \omega_n t)$ sia la soluzione del sistema linearizzato con dati iniziali su $\boldsymbol{T}_I$. Allora, il nostro risultato principale è il seguente

TEOREMA 1. – *Si assuma che H, $H^{(2)}, \ldots, H^{(n)}$ soddisfino le ipotesi* (H1), (H2), (H3), (NR), (ND). *Allora esistono $\rho > 0$, una mappa iniettiva $\mathcal{W}_\gamma \cap B_\rho(\omega_1, \ldots, \omega_n) \ni$*

$\sigma \mapsto \mathcal{I}(\sigma) \in \mathcal{U}$ *e per ogni* $\sigma \in \mathcal{W}_\gamma \cap B_\rho(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ *esiste una funzione multiperiodica* $z_\sigma(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ *tale che* $z_\sigma(\sigma_1 t, \sigma_2 t, \ldots, \sigma_n t)$ *sia soluzione di* (3); *inoltre si ha*

$$\|z_\sigma(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) - v_{\mathcal{I}(\sigma)}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\|_s \leq C\|\mathcal{I}(\sigma)\|^{\frac{r-1}{2}}. \tag{7}$$

REMARK 2. – *La dimostrazione è basata sul teorema della funzione implicita e, come sarà più evidente dalle applicazioni, la famiglia di tori costruita include tipicamente alcuni tori sui quali il moto è periodico.*

REMARK 3. – *Si osserva che i tori finito-dimensionali nelle PDEs hamiltoniane possono essere costruiti con la teoria KAM (cf. Kuksin* [4], *Wayne '90, Craig–Wayne '93* [3], *Bourgain '95, '94, '98* [2], *Kuksin–Pöschel '96); la differenza principale è che in questo lavoro si usa il teorema standard delle contrazioni, invece che le molto più complicate iterazioni di tipo Nash–Moser necessarie per i risultati di tipo KAM. Inoltre la teoria KAM non permette la costruzione di tori risonanti, che in sistemi non simmetrici tipicamente vengono distrutti.*

REMARK 4. – *Il teorema di Nekhoroshev, nel caso finito-dimensionale, permette la costruzione di famiglie continue di tori invarianti. Nel nostro caso si costruiscono solo famiglie di Cantor di tori invarianti. Questo non è affatto un risultato inaspettato, poichè già nel caso delle PDEs la costruzione di orbite periodiche è possibile solo su famiglie di Cantor* (*cf. e.g.* [3], [1]).

REMARK 5. – *La dimostrazione è completamente diversa da quella del caso finito dimensionale. Infatti la dimostrazione per il caso in dimensione finita è ottenuta introducendo una generalizzazione della mappa di Poincaré per il sistema imperturbato e utilizzando tecniche analoghe al teorema della funzione implicita. Ad oggi non è noto nemmeno come usare simili argomenti per la costruzione di orbite periodiche. La nostra dimostrazione si ottiene generalizzando gli argomenti di* [1].

Nella tesi vengono date anche alcune applicazioni del risultato generale:

(1) Equazione non lineare della trave

$$u_{tt} + u_{xxxx} + mu = u^3, \tag{8}$$

con condizioni al bordo periodiche in spazio in $[0, 2\pi]$ e m parametro positivo. L'equazione (8) è una PDE hamiltoniana e ha $H = \int_0^{2\pi} \frac{u_t^2}{2} + \frac{u_{xx}^2}{2} + \frac{mu^2}{2} - \frac{u^4}{4}\, dx$ come Hamiltoniana associata.

Si sfrutta l'invarianza di (8) rispetto al gruppo delle traslazioni in spazio, che è generato dal momento lineare $M = \int_0^{2\pi} uv_x\, dx$, dove $v = u_t$; M gioca il ruolo di $H^{(2)}$. Si espanda u and u_t in serie di Fourier

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{j \geq 1} \frac{q_j}{\sqrt{\omega_j}} \frac{\sin(jx)}{\sqrt{\pi}} + \frac{q_{-j}}{\sqrt{\omega_j}} \frac{\cos(jx)}{\sqrt{\pi}} + \frac{q_0}{\sqrt{2\pi\omega_0}}, \\ v(x,t) &= \sum_{j \geq 1} p_j \sqrt{\omega_j} \frac{\sin(jx)}{\sqrt{\pi}} + p_{-j}\sqrt{\omega_j} \frac{\cos(jx)}{\sqrt{\pi}} + \frac{p_0}{\sqrt{2\pi\omega_0}}, \end{aligned}$$

con $\omega_j = \sqrt{j^4 + m}$. Si definisca $z_j = \dfrac{q_j + ip_j}{\sqrt{2}}$ e si consideri il toro di dimensione 2

$|z_{-1}|^2 = I_{-1} \neq 0$, $|z_1|^2 = I_1 \neq 0$ e $|z_j|^2 = 0$, $|j| \neq 1$. Per il teorema 1 si trova un insieme di Cantor di soluzioni quasiperiodiche a due frequenze. Ovvero si ottiene il seguente risultato:

TEOREMA 2. – *Esiste un insieme $S \subset [0, m_*]$ di misura m_*, tale che, se $m \in S$ allora valgono le seguenti affermazioni. Per ogni $\gamma > 0$ sufficientemente piccolo esistono un insieme $\mathcal{A}_\gamma \subset \boldsymbol{R}^2$, un ρ_* positivo tali che*

1) $|\mathcal{A}_\gamma \cap B_\rho| \geq |B_\rho|(1 - \gamma^{1/3})$, $\forall \rho < \rho_*$

2) *Esiste una mappa lipschitziana $\mathcal{A}_\gamma \cap B_{\rho_*} \ni a \mapsto (\sigma_{-1}(a), \sigma_1(a))$ e per ogni $a \in \mathcal{A}_\gamma \cap B_{\rho_*}$ esiste una funzione biperiodica $u_a(\varphi_1, \varphi_2)$ tale che $u_a(\sigma_{-1}(a)t, \sigma_1(a)t)$ è una soluzione dell'equazione della trave non lineare* (8). *Inoltre si ha*

$$\|u_a(\varphi_1, \varphi_2) - v_a(\varphi_1, \varphi_2)\| \leq C\|a\|^3.$$

Sono stati trovati analoghi risultati anche per le applicazioni:

(2) Trave vibrante in uno spazio di dimensione due, di equazione

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xxxx} + mu = (u^2 + v^2)u \\ v_{tt} + v_{xxxx} + mv = (u^2 + v^2)v \end{cases} \tag{9}$$

con condizioni al bordo $u(0, t) = u(\pi, t)$, $u_{xx}(0, t) = u_{xx}(\pi, t)$, $v(0, t) = v(\pi, t)$, $v_{xx}(0, t) = v_{xx}(\pi, t)$ e con m parametro positivo.

(3) Equazione delle onde non lineare

$$u_{tt} - u_{xx} + mu = u^3 \tag{10}$$

con condizioni al bordo periodiche in spazio in $[0, 2\pi]$ e m un parametro positivo.

BIBLIOGRAFIA

[1] BAMBUSI D., *Lyapunov center theorem for some nonlinear PDE's: a simple proof*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), **29** (2000), 823-837.

[2] BOURGAIN J., *Construction of quasi-periodic solutions for Hamiltonian perturbations of linear equations and applications to nonlinear PDE*, Internat. Math. Res. Notices (1994), 475ff., approx. 21 pp. (electronic).

[3] CRAIG W. and WAYNE C. E., *Newton's method and periodic solutions of nonlinear wave equations*, Comm. Pure Appl. Math., **46** (1993), 1409-1498.

[4] KUKSIN S. B., *Nearly integrable infinite-dimensional Hamiltonian systems*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, **1556** (1993), xxviii+101.

[5] NEKHOROSHEV N. N., *The Poincaré-Lyapunov-Liouville-Arnold's theorem*, Funktsional. Anal. i Prilozhen., **28** (1994), 67-69.

Dipartimento di Matematica "F. Enriques", Università di Milano,
e-mail: bardelle@mat.unimi.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università degli Studi di Milano) - Ciclo XIX
Direttore di ricerca: Prof. Dario Bambusi, Università degli Studi di Milano