Stefano Barbero

Trasformazioni di interi e loro proprietà combinatoriali

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2008), n.2 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 223–226.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2008_1_1_2_223_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2008.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. I, Agosto 2008, 223-226

Trasformazioni di interi e loro proprietà combinatoriali

STEFANO BARBERO

Le successioni di interi hanno da sempre affascinato l'uomo per la loro presenza assidua e talvolta sorprendente in vari ambiti delle scienze, basti pensare alla notissima successione di Fibonacci. Lo studio di tali sequenze si è ampliato e approfondito grazie all'opera di numerosi matematici, che hanno contribuito a creare una vera e propria catalogazione delle successioni più famose, rendendola reperibile in rete [4]. Una delle frontiere di ricerca di recente sviluppo consiste nell'esaminare il comportamento di particolari operatori che trasformano successioni in successioni. Si sono così stabiliti legami che rendono più completa l'opera di classificazione, evidenziando connessioni impreviste tra sequenze emerse da zone differenti della matematica e favorendo una loro interpretazione in ambito combinatorico. Questa tesi è nata dalla lettura di vari articoli relativi a tali operatori, in particolare da alcune osservazioni di Roland Bacher descritte nell'articolo *Sur l'inversion des séries* [1], per esempio: *"Certain suites $I^{(x)}(a)$ semblent posséder des propriétés arithmétiques curieuses ... semblent avoir des propriétés de divisibilité analogues aux entiers ..."* dove $I^{(x)}$ è uno di tali operatori. Partendo dall'idea di voler dare una dimostrazione rigorosa a tali affermazioni, il lavoro si è evoluto fino a coinvolgere altri operatori, mettendo in luce alcune loro caratteristiche in un ambito assai più vasto e al tempo stesso fondato su problematiche classiche, come i polinomi ortogonali e le successioni di Fibonacci generalizzate (un recente contributo in questa direzione si trova in [2]).

L'ambiente su cui ha preso il via lo studio è $S = \left\{a = \{a_n\}_{n=0}^{+\infty}, \forall n \geq 0\ a_n \in Z\right\}$. Sugli elementi di S agiscono gli operatori Invert e Binomial descritti dalla

DEFINIZIONE 1. –

$$I : S \to S$$

$$I(a) = b \Leftrightarrow 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n = \frac{1}{1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n}$$

$$L : S \to S$$

$$L(a) = b \Leftrightarrow b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

Di essi è possibile definire delle *interpolazioni*. Ad esempio ha senso non solo $I^{(n)}$ ottenuto da $I \circ I \circ \cdots \circ I$, composizione compiuta n volte, ma anche $I^{(x)}$, dove x è un numero reale o complesso (si vedano [1] e [5]). Si ottengono così gli operatori Invert e Binomial Interpolati $I^{(x)}$ e $L^{(y)}$ come illustrato nella

DEFINIZIONE 2. –

$$\forall x \in C, I^{(x)} : S \to S$$

$$I^{(x)}(a) = p = \{P_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$$

$$P(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n = \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n}{1 - xt \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n}$$

$$\forall y \in C, L^{(y)} : S \to S$$

$$L^{(y)}(a) = l = \left\{ l_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} y^{n-j} a_j \right\}_{n=0}^{+\infty}$$

$$\mathcal{L}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(yt)^{n-j}}{(n-j)!} \frac{a_j t^j}{j!} = \exp(ty)\mathcal{A}(t)$$

essendo

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!}$$

Se a possiede $a_0 = 1$

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{t} A\left(\frac{t}{1 - ty}\right)$$

$$A(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1}$$

A questi operatori si uniscono i seguenti

DEFINIZIONE 3. –

$$\varepsilon : S \to S$$

$$\varepsilon(a) = \{(-1)^n a_n\}_{n=0}^{+\infty}$$

Operatore Revert

$$\eta : S \to S$$

$$\eta(a) = b$$

dove $b = \{b_n\}_{n=0}^{+\infty}$ *è legata alla successione a dalle relazioni:*

$$u = u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1}$$

$$t = t(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n u^{n+1}$$

Analizzando le reciproche composizioni tra questi operatori si prova il seguente

TEOREMA 1. – *L'insieme*

$$\mathcal{G} = \left\{ L^{(y)} \circ I^{(x)} \circ \eta^{(i)} \circ \varepsilon^{(j)}, \forall x, y \in C; \forall i, j \in \{0, 1\} \right\}$$

è un gruppo continuo rispetto all'operazione di composizione $\circ$*, generato da*

$$I^{(x)}, L^{(y)}, \varepsilon, \eta$$

dipendente dai parametri $x, y \in C, i, j \in \{0, 1\}$ *ed ha come sottogruppi:*

$$\mathcal{T} = \left\{ L^{(y)} \circ I^{(x)}, \forall x, y \in C \right\}$$

$$\mathcal{I} = \left\{ I^{(x)}, \forall x \in C \right\}$$

$$\mathcal{L} = \left\{ L^{(y)}, \forall y \in C \right\}$$

$$\eta = \left\{ \eta^{(i)}, \forall i \in \{0, 1\} \right\}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \varepsilon^{(j)}, \forall j \in \{0, 1\} \right\}$$

In particolare viene studiata l'azione di tale gruppo sull'insieme delle sucessioni ricorrenti lineari di ordine due. L'effetto sui parametri che definiscono le ricorrenze è determinato esplicitamente. Se ne evidenziano le orbite e un invariante rispetto a tali orbite, considerando la situazione significativa di successioni a elementi in un anello commutativo con a_0 invertibile.

Un approfondimento di questo studio, in particolare dell'azione di $I^{(x)}$ sulle sequenze di Fibonacci generalizzate, porta alla dimostrazione rigorosa dell'osservazione di Bacher citata. Inoltre permette di definire una famiglia di polinomi ortogonali (legata ai polinomi di Dickson di seconda specie) per cui si determinano espressioni esplicite dei momenti, calcolando di questi ultimi la funzione generatrice, la funzione peso e una relazione di ricorrenza. Tali momenti possiedono un'interpretazione combinatoriale come enumeratori dei cammini di Motzkin h, k-colorati.

Spostando l'attenzione sull'operatore Revert, definito come l'inversione funzionale di serie, si prova che esso è una biiezione che mappa le successioni di Fibonacci generalizzate nelle sequenze di tali momenti. Questo consente di trovarne espressioni alternative, le quali, con le relazioni di ortogonalità forniscono inattese identità che coinvolgono altre sequenze note in ambito combinatorico, come i numeri di Catalan. Il legame tra l'operatore Revert e gli operatori Invert e Binomial interpolati è assai stretto, infatti si prova che Revert trasforma per coniugio l'operatore $I^{(x)}$ in $L^{(-x)}$.

Infine si rende chiaro il nesso esistente tra gli operatori $I^{(x)}$ e $L^{(x)}$. Infatti considerato un anello R di cui R^* sia l' insieme degli elementi invertibili si ponga

$$S = \left\{ A = \{a_n\}_{n=0}^{+\infty} \ \forall n \ a_n \in R \right\}$$

$$S' = \left\{ A = \{a_n\}_{n=0}^{+\infty} \ \forall n \ a_n \in R, a_0 \in R^* \right\}$$

Introdotta su tali insiemi l'operazione tra successioni $\bullet$ mediante la

DEFINIZIONE 4. –
$$\forall A, B \in S \; A \bullet B = \lambda^{-1}(\lambda(A) \circ \lambda(B))$$
con
$$\lambda(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1}$$
e
$$\lambda(A) \circ \lambda(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^{k+1})^{n+1}$$
si deducono i seguenti teoremi

TEOREMA 2. – *L'insieme* $(S, \bullet)$ *risulta un semigruppo mentre il sottoinsieme* $(S', \bullet)$ *un gruppo dove l'inverso di un elemento* A *è dato da* $A^{-1} = \eta(A)$, *calcolabile con le tecniche descritte in* [3].

TEOREMA 3. – *Scelto* $R = Z[x]$ *e considerato l'insieme*
$$P = \left\{A = \{a_n(x)\}_{n=0}^{+\infty} \; \forall n \; a_n(x) \in Z[x], a_0(x) = 1\right\}$$
Si ha $\forall A \in P$
$$I^{(x)}(A) = X \bullet A$$
$$L^{(x)}(A) = A \bullet X$$
Dove $X = \{x^n\}_{n=0}^{+\infty}$

I risultati ottenuti aprono la strada a interessanti sviluppi, che coinvolgono la teoria dei gruppi di Nottingham e Riordan, i polinomi di Bell ordinari e i polinomi di Dickson, su cui stanno procedendo le mie ricerche.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BACHER, *Sur L'inversion des séries*, Prépublication de l'Institut Fourier (2003), 589.
[2] C. BERG, *Fibonacci numbers and orthogonal polynomials*, in corso di stampa sul J. Comput. Appl. Math. (2006).
[3] D. DOMINICI, *Nested Derivatives: A Simple Method For Computing Series Expansion Of Inverse Functions*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, **58** (2003), 3699-3715.
[4] N.J.A. SLOANE, *The on-line encyclopedia of integer sequences*, Notices of the American Mathematical Society (2003), 912-915.
[5] M.Z. SPIVEY, L.L. STEIL, *The k-Binomial Transforms and the Hankel Transform*, Journal of Integer Sequences, **9** (2006).

Dipartimento di Matematica Università di Torino
e-mail: stefano.barbero@unito.it
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Università di Torino) - Ciclo XVII
Direttore di ricerca: Prof. Umberto Cerruti, Università di Torino